La velocità della luce e la statica del campo gravitazionale

A. Einstein

A partire dall'ipotesi che il campo gravitazionale e lo stato accelerato di un sistema di coordinate sono equivalenti da un punto di vista fisico, in un articolo che è apparso lo scorso anno (¹) trassi alcune conclusioni che si riallacciano molto bene ai risultati della teoria della relatività (teoria della relatività dei moti uniformi). Ma nello stesso tempo è accaduto che uno dei principi base della teoria, più precisamente, il principio della costanza della velocità della luce, sia valido solo in regioni spazio-temporali con potenziale gravitazionale costante. Anche se questo risultato elimina l'universale applicabilità delle trasformazioni di Lorentz, non ci dovrebbe allontanare dall'altro obiettivo del percorso che abbiamo intrapreso: ritengo infatti che, in ultima analisi, l'ipotesi che il "campo accelerato" sia un caso speciale di campo gravitazionale abbia una così grande probabilità, specie a riguardo delle conclusioni sul contenuto energetico della massa gravitazionale, già indicata nel primo articolo, che è consigliata una più approfondita analisi dei risultati della precedente ipotesi.

In seguito Abraham ha proposto una teoria della gravitazione (²) che contiene le conclusioni ottenute nel primo articolo come casi particolari. In ogni modo, mostreremo nelle pagine seguenti che il sistema di equazioni di Abraham non può riconciliarsi con l'ipotesi di equivalenza ed inoltre che i suoi concetti di spazio e tempo non sono validi anche solo da un punto di vista formale e matematico.

1. Spazio e tempo nel campo accelerato.

Consideriamo un sistema di riferimento K (coordinate x, y, z) che si trovi in uno stato di accelerazione uniforme nella direzione delle x. Supponiamo che questa accelerazione sia uniforme nel senso di Born, cioè che l'accelerazione della sua origine, in riferimento ad un sistema non accelerato rispetto a cui i punti di K abbiano una velocità trascurabile, abbia un valore costante. In accordo con l'ipotesi di equivalenza, un tale sistema è strettamente equivalente ad un sistema a riposo in cui sia presente un campo gravitazionale statico di una certa intensità. Le misurazioni spaziali di K sono compiute per mezzo di aste che – quando sono comparate in uno stato di riposo nel medesimo punto in K – risultano della stessa lunghezza; le leggi della geometria varranno per lunghezze così misurate, quindi anche per relazioni fra le coordinate x, y, z e altre lunghezze. Questa assunzione non deve essere pensata come una cosa naturale; infatti essa contiene assunzioni fisiche che potrebbero rivelarsi errate; per esempio, molto probabilmente esse non valgono per sistemi in rotazione uniforme in cui, per la contrazione di Lorentz, il rapporto fra la circonferenza e il diametro dovrebbe essere differente da π se applicassimo la nostra definizione. Le aste per la misurazione così come gli assi delle coordinate devono essere concepiti come corpi rigidi. Questo deve essere permesso nonostante

(¹)A.Einstein, *Ann. d. Phys.* 35 (1911):35
(²)M. Abraham, *Phys. Zeitschr.*. 13 (1912)

il fatto che, in accordo con la teoria della relatività, i corpi rigidi non abbiano esistenza reale. Infatti si può immaginare il corpo rigido utilizzato nella misura come un grande numero di oggetti non rigidi posizionati l'uno accanto all'altro in modo tale che essi non esercitino alcuna pressione fra di loro e che ognuno sia supportato separatamente. Immaginiamo inoltre che il tempo t nel sistema K sia misurato da orologi vincolati ai punti spaziali di K e che essi siano costruiti in modo tale che l'intervallo temporale – da loro misurato – necessario a un raggio luminoso per andare da un punto A ad uno B del sistema K non dipenda dall'istante di emissione in A. Inoltre si noti che la simultaneità può essere definita in modo consistente postulando che, in riferimento al *settaggio* degli orologi, tutti i raggi luminosi che passano nel punto A di K abbiano la stessa velocità di propagazione in A indipendentemente dalla loro direzione.

Immaginiamo ora che il sistema di riferimento $K(x, y, z, t)$ sia osservato da un sistema di riferimento non accelerato (con un potenziale gravitazionale costante) $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Richiediamo che l'asse delle x coincida permanentemente con l'asse delle ξ ed inoltre che l'asse delle y e quello delle z siano sempre paralleli rispettivamente all'asse η e ζ. Questa richiesta è possibile se assumiamo che lo stato di accelerazione non abbia alcuna influenza sulla forma di K in riferimento a Σ. Prendiamo queste assunzioni fisiche come i nostri fondamenti. Ne consegue per un tempo arbitrario τ che dobbiamo avere

$$\begin{aligned} \eta &= y \\ \zeta &= z \end{aligned} \tag{1}$$

così che ci rimane da determinare da un lato la relazione che intercorre fra ξ e τ e dall'altro quella fra x e t. Supponiamo che i due sistemi di riferimento coincidano al tempo $\tau = 0$; di conseguenza le equazioni di sostituzione che stiamo cercando devono assumere la forma

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda + \alpha t^2 + \quad \dots \\ \tau &= \beta + \gamma t + \delta t^2 + \quad \dots \end{aligned} \tag{2}$$

I coefficienti di queste serie, che valgono per valori di t sia positivi che negativi sufficiente piccoli, saranno considerati provvisoriamente come funzioni sconosciute di x. Limitandoci ai termini indicati, otteniamo per differenziazione

$$\begin{aligned} d\xi &= (\lambda' + \alpha' t^2)dx + 2\alpha t dt \\ d\tau &= (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)dx + (\gamma + 2\delta t)dt \end{aligned} \tag{3}$$

Immaginiamo che il tempo sia misurato nel sistema Σ in modo tale che la velocità della luce sia uguale ad 1. Di conseguenza possiamo scrivere le equazioni di un guscio sferico in espansione alla velocità della luce da un qualsiasi punto spazio-temporale nella maniera seguente, limitandoci ad una regione infinitamente piccola attorno al punto in esame:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\tau^2 = 0 \tag{4}$$

Nel sistema K il medesimo guscio sferico deve avere equazione

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 \tag{5}$$

Le equazioni di sostituzione (2) devono essere tali che queste due equazioni siano equivalenti. Per la (1) questo richiede l'identità

$$d\xi^2 - d\tau^2 = dx^2 - c^2 dt^2 \tag{6}$$

Se si sostituisce nella parte sinistra di questa equazione le espressioni in dx e dt ottenute tramite la (3), e se i coefficienti di dx^2, dt^2 e $dxdt$ sono eguagliati l'un l'altro da entrambi i lati, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 1 &= (\lambda' + \alpha' t^2)^2 - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)^2 \quad , \\ -c^2 &= 4\alpha^2 t^2 - (\gamma + 2\delta t)^2 \quad , \\ 0 &= (\lambda' + \alpha' t^2) 2\alpha t - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)(\gamma + 2\delta t) \end{aligned} \tag{7}$$

Queste equazioni sono identità in t a meno di sue potenze così alte che i termini omessi in (2) non hanno ancora alcun effetto, così, la prima equazione contiene termini in t fino al secondo ordine, la seconda e la terza fino alla prima potenza. Questo ci conduce alle equazioni

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda'^2 \beta'^2, \quad 0 = \beta'\gamma', \quad 2\lambda\alpha' - \gamma'^2 - 2\beta'\delta' = 0 \quad , \\ -c &= -\gamma^2, \quad 0 = \gamma\delta \quad , \\ 0 &= \beta'\gamma, \quad 0 = 2\alpha\lambda' - 2\beta'\delta - \gamma\gamma' \end{aligned} \tag{8}$$

Poiché γ non può svanire, ne consegue dalla prima equazione nella terza riga che $\beta' = 0$. Così β è una costante che può essere eguagliata a zero se il tempo iniziale è scelto in modo appropriato. Inoltre, il coefficiente γ deve essere positivo; quindi, in accordo alla prima equazione della seconda riga abbiamo

$$\gamma = c \tag{9}$$

In accordo con la seconda equazione della seconda linea abbiamo

$$\delta = 0 \tag{10}$$

Poiché β' si annulla e possiamo assumere che x aumenti con ξ, segue dalla prima equazione della prima linea

$$\lambda' = 1 \tag{11}$$

quindi, se richiediamo $x = 0$ per $t = 0$ e $\xi = 0$, allora

$$\lambda = x \tag{12}$$

Infine, dalla terza equazione della prima riga e dalla seconda equazione della terza, otteniamo, con l'aiuto delle relazioni già trovate, le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} 2\alpha' - c'^2 &= 0 \\ 2\alpha - cc' &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Da loro ricaviamo, se indichiamo la costanti di integrazione con c_0 e a

$$\begin{aligned} c &= c_0 + ax \\ 2\alpha &= a(c_0 + ax) = ac \end{aligned} \tag{14}$$

Così abbiamo le sostituzioni che stavamo cercando per un valore sufficientemente piccolo di t. Se trascuriamo le potenze superiori al secondo ordine in t, valgono le equazioni

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{ac}{2} t^2 \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \\ \tau &= ct \end{aligned} \tag{15}$$

dove la velocità della luce c nel sistema K, che può dipendere dalle x ma non dalle t, è data dalla relazione che abbiamo appena derivato,

$$c = c_0 + ax \tag{16}$$

La costante c_0 dipende dai battiti dell'orologio con cui abbiamo misurato il tempo nell'origine di K. Il significato della costante a è ottenuto nella maniera seguente. La prima e la quarta equazioni delle (15) da alla luce della (16) la seguente equazione del moto per l'origine ($x = 0$) di K

$$\xi = \frac{a}{2c_0}\tau^2 \tag{17}$$

Così, a/c_0 è l'accelerazione dell'origine di K in riferimento a Σ, misurata nelle unità di tempo in cui la velocità della luce è pari ad 1.

2. Le equazioni differenziali di un campo gravitazionale statico, le equazioni del moto di un punto materiale nel campo gravitazionale statico.

È già emerso dal precedente articolo che esiste una relazione fra c e il potenziale gravitazionale in un campo statico, o, in altre parole, che il campo è determinato da c. In accordo con la (16) e con il principio di equivalenza, nel campo gravitazionale corrispondente al campo accelerato considerato in §1, l'equazione

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 \tag{18}$$

è soddisfatta, e questo ci permette di assumere che dobbiamo vedere questa equazione come valida in ogni campo gravitazionale in assenza di masse([3]). In ogni caso, questa è la più semplice equazione compatibile con la (16). È facile stabilire quale sia l'equazione presumibilmente valida che corrisponde all'equazione di Poisson. Infatti si deduce immediatamente dal significato di c che c è determinata a meno di un fattore costante dipendente dalla costruzione dell'orologio con cui si misura t nell'origine di K. Quindi l'equazione che corrisponde a quella di Poisson deve essere omogenea in c. La più semplice equazione che si possa considerare è l'equazione lineare

$$\Delta c = kc\rho \tag{19}$$

dove k denota la costante di gravitazione (universale), e ρ la densità di materia. La seconda deve essere definita in modo tale che sia già data dalla distribuzione massiva, cioè, che per una certa quantità di materia data nell'elemento spaziale essa sia indipendente da c. Questo lo raggiungiamo ponendo la massa di un cm^3 di acqua pari a 1, indipendentemente dal potenziale gravitazionale in cui è messo; ρ allora diviene il rapporto fra la massa contenuta in un centimetro cubo e la sua unità.

Ora cerchiamo di determinare le equazioni del moto di un punto materiale in un campo gravitazionale statico. A tal fine cerchiamo la legge del moto per un punto materiale libero di muoversi nel campo accelerato considerato in §1. Nel sistema Σ questa legge del moto è

$$\begin{aligned} \xi &= A_1\tau + B_1 \\ \eta &= A_2\tau + B_2 \\ \zeta &= A_3\tau + B_3 \end{aligned} \tag{20}$$

([3])Un articolo che verrà pubblicato fra breve mostra che le equazioni (18) e (19) non sono ancora completamente esatte. Comunque esse saranno usate provvisoriamente in questo articolo dove A e B sono costanti. Utilizzando la (15), queste equazioni si trasformano nelle seguenti considerando un tempo t sufficientemente piccolo:

$$\begin{aligned} x &= A_1 ct + B_1 - \frac{ac}{2}t^2 \\ y &= A_2 ct + B_2 \\ z &= A_3 ct + B_3 \end{aligned} \tag{21}$$

Differenziando due volte e ponendo $t = 0$, si ottiene dalla prima equazione le due equazioni ([4])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 c \\ \ddot{x} &= 2a_1 \dot{c} - ac^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Eliminando A_1, da queste si ottengono due equazioni

$$c\ddot{x} - 2\dot{c}\dot{x} = ac^2 \tag{23}$$

o l'equazione

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) = -\frac{a}{c^2} \tag{24}$$

In modo analogo si ricava per le altre due componenti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Queste tre equazioni sono valide, in primo luogo, per il tempo $t = 0$. Comunque esse valgono in generale in quanto questo tempo non è distinguibile da altri tempi eccetto per il fatto che l'abbiamo considerato come il punto di partenza della nostra espansione in serie. Le equazioni così ottenute sono le equazioni del moto che stavamo cercando per un corpo libero di muoversi in un campo accelerato. Se teniamo in conto che $a = \partial c/\partial x$, e che $(\partial c/\partial y) = (\partial c/\partial z) = 0$, possiamo anche scrivere le equazioni nella forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial z} \end{aligned} \tag{26}$$

Con le equazioni scritte in questa forma, la direzione delle x non è più distinguibile; entrambi i lati hanno un carattere vettoriale. Per questa ragione, le equazioni si possono anche considerare come le equazioni di un punto materiale in un campo gravitazionale statico se il punto è soggetto solo all'azione della gravità. Dalla (26) possiamo in primo luogo trovare la relazione fra la costante k della (19) e la costante di gravitazione K nel senso ordinario. Nel caso di basse velocità, abbiamo in accordo con la (26),

$$\ddot{x} = -c\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{27}$$

([4])I termini omessi nella (2) non compaiono nel risultato quando si differenzia due volte e in seguito si pone t pari a zero.

così che la (19) diviene, ignorando alcuni termini,

$$\Delta\Phi = kc^2\rho \tag{28}$$

Così abbiamo

$$K = kc^2 \tag{29}$$

In questo modo la costante gravitazionale K non è una costante universale; solo il rapporto K/c^2 lo è.

Se in seguito moltiplichiamo le equazioni (26) per $\dot{x}/c^2$, $\dot{y}/c^2$, $\dot{z}/c^2$ e poi sommiamo ponendo

$$q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{30}$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2}\right) \tag{31}$$

o

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\right] = 0 \tag{32}$$

o

$$\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = const \tag{33}$$

Questa equazione contiene il principio dell'energia per un punto materiale in un campo gravitazionale statico. La parte sinistra dell'equazione dipende da q nella stessa maniera in cui l'energia di un punto materiale dipende da q nella ordinaria teoria della relatività. Dobbiamo dunque vedere la parte sinistra dell'equazione, a meno di un fattore (che dipende solamente dal punto materiale stesso), come l'energia E del punto. Ovviamente questo fattore deve essere eguagliato con la massa m nel senso indicato in precedenza, in quanto quella definizione stabilisce che la massa sia indipendente dal potenziale gravitazionale. Quindi abbiamo

$$E = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \tag{34}$$

o in modo approssimato

$$E = mc + \frac{m}{2c}q^2 \tag{35}$$

Dal secondo termine in questa espansione si deduce in primo luogo che la quantità di solito considerata come energia possiede una dimensione che si allontana dall'ordinario. Di conseguenza, l'unità di misura della quantità di energia individuale sarà pure differente da quella di solito utilizzata, specificatamente c volte minore. Inoltre, 'l'energia cinetica', che infatti non può essere distinta dall'energia gravitazionale in accordo con la (34), dipende non solo da m e q ma anche da c, cioè dal potenziale gravitazionale. Dalla (34) consegue anche l'importante risultato che l'energia di un punto a riposo nel campo gravitazionale è mc. Se vogliamo utilizzare la relazione

$$forza \quad \bullet \quad distanza \quad = \quad energiafornita \tag{36}$$

allora la forza R esercitata su un punto materiale a riposo nel campo gravitazionale è

$$R = -mgrad(c) \tag{37}$$

Ora cerchiamo di determinare le equazioni del moto di un punto materiale in un campo gravitazionale statico arbitrario nel caso in cui anche altre forze oltre la gravità agiscano sul punto. Notiamo che le equazioni (26) non sono simili alle equazioni del moto valide nella meccanica relativistica. In ogni caso, se le moltiplichiamo per la parte sinistra della (33) otteniamo equazioni equivalenti alle (26)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \quad etc. \tag{38}$$

Eccetto che per il fattore $1/c$ che appare a numeratore e che non ha conseguenze nell'ordinaria teoria della relatività, la parte sinistra ha esattamente la stessa forma di quella ordinaria. Dovremo dunque indicare la quantità fra parentesi come la componente x del momento (per un punto di massa unitaria). Inoltre, abbiamo appena mostrato che $-dc/dx$ è da considerarsi come la componente x della forza esercitata dal campo gravitazionale su un punto massivo immobile. La forza esercitata dal campo gravitazionale su un punto materiale di massa unitaria in moto arbitrario può differire dalla precedente solo per un fattore che scompare quando q tende a zero. L'equazione che abbiamo ora individuato porta e eguagliare la forza R_g con $-\frac{dc/dx}{\sqrt{(1-q^2/c^2)}}$. Quindi, la derivata rispetto al tempo del momento coincide con la forza agente. Se un'altra forza R agisce sul punto, dovremo aggiungere un ulteriore termine R/m nella parte destra dell'equazione, così che l'equazione del moto di un punto massivo unitario assumerà la forma

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{m\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + R_x \quad etc. \tag{39}$$

Pertanto quest'equazione è ammissibile solo se il principio dell'energia è soddisfatto nella forma

$$Rq = \dot{E} \tag{40}$$

Questo può essere dimostrato nella maniera seguente.

Se scriviamo la (39) nella forma

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{x}}{c^2}E\right\} + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}E = R_x \quad etc. \tag{41}$$

moltiplichiamo queste equazioni successivamente per x/c^2 etc.., e poi le sommiamo, otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\dot{E} + \frac{1}{2}E\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) + E\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{Rq}{c^2} \tag{42}$$

Da questa ricaviamo la relazione che stiamo cercando se teniamo in conto che, grazie alla (34)

$$\frac{q^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{m^2}{E^2} \tag{43}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} + \frac{m^2E}{E^3} \tag{44}$$

In questo modo le relazioni fra la forza e le leggi del momento e dell'energia rimangono valide.

3. Considerazioni sul significato fisico del potenziale gravitazionale statico.

Se misuriamo la velocità della luce in uno spazio a potenziale gravitazionale costante misurando con uno specifico orologio il tempo impiegato dalla luce a percorrere un percorso chiuso di lunghezza specificata, otteniamo sempre il medesimo risultato indipendentemente dal potenziale gravitazionale del luogo in cui si sono svolte le misurazioni([5]). Questo segue direttamente dal principio di equivalenza. Così, se diciamo che la velocità della luce in un punto P è c/c_0 volte più grande di quella misurata in P_0, significa che per misurare il tempo ([6]) in P, dobbiamo usare un orologio che viaggia c/c_0 volte più piano di quello usato per misurare il tempo in P_0, se gli intervalli temporali dei due orologi sono confrontati l'un l'altro nello stesso posto. In altre parole: un orologio viaggia tanto più veloce quanto più grande è c del luogo che consideriamo. Questa dipendenza della velocità del passaggio del tempo dal potenziale gravitazionale (c) è valida per lo scorrere del tempo per qualsiasi processo. Questo è già stato osservato nell'articolo precedente.

Inoltre, la tensione in una molla caricata in una certa maniera, e in generale, la forza o l'energia di un sistema arbitrario dipende dalla grandezza di c nel punto in cui è posizionato il sistema. Questo può essere mostrato facilmente dal seguente elementare argomento. Se compiamo una serie di esperimenti l'uno dopo l'altro in piccole parti di spazio di differente c, e utilizziamo sempre lo stesso orologio, la stessa asta rigida, ecc... allora troviamo in ogni luogo – eccetto possibili differenze nell'intensità del campo gravitazionale – le stesse leggi con le medesime costanti. Questo consegue dal principio di equivalenza. Due specchi, posti a una distanza di un cm l'un l'altro possono servire, ad esempio, come orologio, dove contiamo il numero di volte che un segnale luminoso percorre il tragitto fra i due specchi; in quel caso operiamo con una sorta di tempo locale, che Abraham denota con l. La relazione fra questo tempo e il tempo universale è allora

$$dl = cdt \tag{45}$$

Se misuriamo il tempo per mezzo di l, impartiremmo ad una molla caricata in una qualche maniera e dotata di massa m, attraverso l'energia di deformazione, una certa velocità dx/dl indipendentemente dalla grandezza di c nel luogo dove il processo è compiuto. Abbiamo

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{cdt} = a \tag{46}$$

dove a è indipendente da c. Ma in accordo con la (34), possiamo indicare l'energia cinetica che corrisponde a questo moto pari a

$$\frac{m}{2c}q^2 = \frac{m}{2c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2c}a^2c^2 = \frac{ma^2}{2}c \tag{47}$$

Così l'energia della molla è proporzionale a c, e la medesima cosa è valida per l'energia e le forze di un qualsiasi sistema. Questa dipendenza ha un significato fisico diretto. Immaginiamo, per esempio, una corda priva di massa tirata fra due punti P_1 e P_2 con differente potenziale gravitazionale. Consideriamo poi due molle identiche che tirino la corda da entrambi i lati, una da P_1 e l'altra da P_2, in modo tale che il sistema sia in equilibrio. Le estensioni l_1 e l_2 delle due molle non saranno uguali; piuttosto, la condizione di equilibrio sarà ([7])

$$l_1c_1 = l_2c_2 \tag{48}$$

([5])Usiamo sempre il medesimo orologio per le misurazioni; l'orologio è sempre riconducibile al luogo in cui c deve essere determinata

([6])il tempo indicato nelle equazioni con "t"

([7])Si assume che nessuna forza agisca sulla corda priva di massa . La giustificazione di questa richiesta sarà presentata in un articolo che presto seguirà il presente.

Infine, deve essere ricordato che l'equazione (19) è anche in accordo con questo risultato. Poiché consegue da questa equazione, e dalla circostanza che la forza gravitazionale agente su una massa m è pari a $-mgrad(c)$, che la forza R con cui due masse posizionate in un potenziale c ad una distanza r si attraggono, è data in prima approssimazione da

$$R = ck\frac{mm'}{4\pi r^2} \tag{49}$$

Così, anche questa forza è proporzionale a c. Inoltre se consideriamo un "orologio gravitazionale" formato da una massa m che rivoluziona attorno ad una massa m' ad una costante distanza R, sotto la sola influenza gravitazionale, allora, in accordo con la (39), questo accade in prima approssimazione in accordo con le equazioni

$$m\ddot{x} = cR_x \quad etc \tag{50}$$

Da questo segue che

$$m\omega^2 R = c^2 k\frac{mm'}{4\pi R^2} \tag{51}$$

la quantità ω dell'orologio gravitazionale è così proporzionale a c, che dovrebbe essere il caso di un qualsiasi orologio.

4. Considerazioni generali sullo spazio e sul tempo.

Quale è dunque il rapporto fra questa teoria e la vecchia teoria della relatività (cioè la teoria della c universale)? Secondo Abraham le trasformazioni di Lorentz dovrebbero valere nell'infinitamente piccolo proprio come prima, cioè ci dovrebbero essere delle trasformazioni per le x e le t del tipo

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ dt' &= \frac{-\frac{v}{c^2}dx + dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{52}$$

dx' e dt' sono i differenziali totali. Le seguenti equazioni dovrebbero dunque valere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \end{aligned} \tag{53}$$

Sia il campo gravitazionale nel sistema senza apice un campo statico. In quel caso c è una funzione arbitraria di x, ma è indipendente da t. Se il sistema con l'apice deve essere in moto "uniforme", allora v deve essere indipendente da t per x fissati. La parte sinistra delle equazioni, e quindi anche la destra, deve dunque svanire. Ma questo è impossibile, perché se c è una funzione arbitraria di x, allora le due parti destre non possono annullarsi entrambe scegliendo v come funzione di x. Questo prova, dunque, che le trasformazioni di Lorentz non possono essere considerate valide per piccole regioni spaziotemporali proprio come si rinuncia all'universale costanza di c.

Mi sembra che il problema spaziotemporale sia il seguente. Se ci limitiamo ad una regione con potenziale gravitazionale costante, allora le leggi di natura assumono una forma estremamente semplice e invariante se le riferiamo ad uno dei sistemi equivalenti dello spaziotempo connessi fra loro da trasformazioni di Lorentz a velocità della luce costante. Se invece consideriamo regioni dove c è variabile, ne consegue che l'insieme di sistemi equivalenti e l'insieme delle trasformazioni che lasciano invariate le leggi di natura, diventerm̀aggiore, ma per questi le stesse leggi diverranno più complicate.
Praga, Febbraio 1912.