Esiste un effetto gravitazionale analogo all'induzione Elettrodinamica?

A. Einstein

Prendendo come modello un chiaro e specifico esempio, si puó formulare la domanda posta nel titolo nel modo seguente. Consideriamo un sistema di masse ponderabili costituito da un guscio sferico K di massa M, distribuita in modo omogeneo sulla superficie della sfera, e un punto materiale P di massa m, posizionato nel centro della sfera. Se impartisco un'accelerazione Γ al guscio K, sul punto fisso P agisce una qualche forza? Le seguenti argomentazioni ci indurranno a considerare una tale forza come realmente presente e ci forniranno la sua grandezza in prima approssimazione.

1. In accordo con la teoria della relativitá, la massa inerziale di un sistema fisico chiuso dipende dal suo contenuto di energia in modo tale che un aumento di energia del sistema pari ad E aumenterá la massa inerziale di $\frac{E}{c^2}$, dove c denota la velocitá della luce nel vuoto. Cosí se M rappresenta la massa inerziale di K in assenza di P, e m la massa inerziale di P in assenza di K, o, in altre parole, se $M+m$ rappresenta la massa inerziale del sistema (P + K) nel caso in cui m sia molto distante da K, allora, se m é nel centro di K, la massa inerziale del sistema nel suo insieme é

$$M + m - \frac{kMm}{Rc^2} \quad ... \tag{1}$$

dove k denota la costante di gravitazione ed R il raggio di K. La quantitá $\frac{kMm}{R}$ (almeno in prima approssimazione) é l'energia che si deve fornire per trasportare P dal centro di K all'infinito.

2. In un articolo che tra breve apparirá sugli *Annalen der Physic*, avevo mostrato, partendo da un'ipotesi sulla natura del campo gravitazionale statico, che un punto materiale si muove sotto l'azione di un tale campo gravitazionale in accordo con le seguenti equazioni:

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\Big] = \frac{-\frac{dc}{dx}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \frac{R_x}{m} \quad , \quad etc. \tag{2}$$

Qui $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, e q rappresenta la velocitá di un punto materiale, m la sua massa, R_x la forza che agisce su di esso, c la velocitá della luce, che é da considerarsi come funzione delle coordinate x, y, z. Da queste equazioni si deduce, fra le altre cose, che $\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ si puó pensare come l'energia del punto materiale, e $\frac{m}{2}\frac{q^2}{c}$, in prima approssimazione, come la sua energia cinetica. Al fine di ottenere l'energia cinetica nell'unitá abituale, bisogna moltiplicare questa espressione per la costante c_0, che é la velocitá della luce all'infinito; sia l'ultima la velocitá media della luce nel nostro potenziale gravitazionale. Cosí, nelle usuali unitá l'energia cinetica L é

$$L = \frac{m}{2} q^2 \frac{c_0}{c} \tag{3}$$

Al fine di conoscere l'espressione di L per un luogo qualsiasi, dobbiamo ancora determinare c come funzione di x, y, z. In accordo con le equazioni del moto indicate, per un punto sufficientemente lento soggetto solamente al campo gravitazionale, si ha

$$\ddot{x} = -c \frac{dc}{dx} \quad , \quad etc \tag{4}$$

o, se si definisce il potenziale gravitazionale Φ, in modo simile otteniamo,

$$\frac{d\Phi}{dx} = c \frac{dc}{dx} \quad , \quad etc \tag{5}$$

Dopo l'integrazione, se Φ_0 rappresenta il potenziale gravitazionale prevalente all'infinito, abbiamo con sufficiente accuratezza,

$$\Phi_0 - \Phi = c_0(c_0 - c) = c_0^2 (1 - \frac{c}{c_0}) \tag{6}$$

$$o \quad \frac{c}{c_0} = 1 - \frac{\Phi_0 - \Phi}{c_0^2} \tag{7}$$

Per il punto materiale all'interno di K, $\Phi_0 - \Phi$ é uguale a $\frac{kM}{R}$, cosí che si ottiene approssimativamente

$$L_p = \frac{m}{2} q^2 (1 - \frac{kM}{Rc_0^2}) \tag{8}$$

e quindi per una massa inerziale m' influenzata da K

$$m' = m + \frac{kmM}{Rc_0^2} \quad ... \tag{9}$$

Il risultato é di grande interesse. Si nota infatti che la presenza del guscio K aumenta la massa inerziale di un punto P al suo interno. Ció suggerisce che l'intera inerzia di un punto materiale é un effetto della presenza di tutte le altre masse, risultante da un certo tipo di interazione con esse.([1]) Il grado di esattezza di questa idea diventerá chiaro solo quando saremo in possesso di una robusta teoria della gravitazione. É chiaro che, in modo analogo, la presenza di P aumenta la massa inerziale di K. Con un argomento del tutto simile a quello appena presentato, la massa inerziale M' di K influenzata da P assume il valore

$$M' = M + \frac{kmM}{Rc_0^2} \quad ... \tag{10}$$

3. Cerchiamo ora le forze F ed f necessarie per fornire un'accelerazione Γ e γ alle masse M o m in una certa direzione. Se A, a e α rappresentano i coefficienti ignoti , possiamo porre

$$\begin{aligned} F &= A\Gamma + \alpha\gamma \\ f &= a\gamma + \alpha\Gamma \end{aligned} \tag{11}$$

([1])É esattamente il punto di vista che E.Mach ha proposto nella sua approfondita analisi sull' argomento

I coefficienti dei secondi termini (α) sono scelti uguali nelle due equazioni, poiché la reazione di K su P quando solo K é accelerato deve ovviamente essere uguale alla reazione di P su K quando solo P é accelerato. I coefficienti A, a e α seguono dall'esame dei tre casi speciali ai quali le equazioni (1), (9) e (10) si riferiscono. Nel primo caso K e P hanno la stessa accelerazione. Supponiamo che essa sia γ. Dalla (11) e dalla (1) si ottiene

$$F + f = (A + \alpha + 2\alpha)\gamma = (M + m - \frac{kMm}{Rc^2}) \tag{12}$$

o

$$A + a + 2\alpha = M + m - \frac{Mkm}{Rc^2} \quad ... \tag{13}$$

Nel secondo caso, in cui solo P é accelerato, si ha, in accordo con la seconda equazione delle (11) e tenendo presente la (9)

$$f = a\gamma = (m + \frac{kmM}{Rc^3})\gamma \tag{14}$$

o

$$a = m + \frac{kmM}{Rc^2} \quad ... \tag{15}$$

Il terzo caso da in modo analogo

$$A = M + \frac{kmM}{Rc^2} \quad ... \tag{16}$$

Dalle equazioni (13), (15) e (16) otteniamo

$$\alpha = -\frac{3}{2}\frac{kmM}{Rc^2} \tag{17}$$

Usando il valore di α appena trovato e considerando il caso in cui solo K é accelerato, mentre P rimane fisso, la seconda equazione delle (11) assume la forma:

$$(-k) = \frac{3}{2}\frac{kmM}{Rc^2}\Gamma \tag{18}$$

k é qui la forza che deve essere esercitata su un punto materiale P al fine che esso rimanga fermo; cosí $(-k)$ é la forza esercitata (indotta) su P dal guscio sferico K, dotato di accelerazione Γ. Questa forza ha lo stesso segno dell'accelerazione, in contrasto con la corrispondente interazione fra due cariche elettriche.