

La possibilità del completamento della richiesta di relatività nella meccanica classica

E. SCHRODINGER

E' ben noto che la Meccanica Classica del punto materiale con forze centrali, le cui fondamenta furono sviluppate nella forma più chiara da L. Boltzmann⁽¹⁾, fu criticata in primo luogo da E. Mach⁽²⁾ in quanto non assolveva la richiesta di relatività suggerita in modo chiaro da alcune considerazioni epistemologiche - le sue leggi infatti non valgono per sistemi di coordinate che si muovono in moto *arbitrario*, ma solo per un particolare gruppo di sistemi, detto inerziale, accomunati da un moto traslatorio uniforme reciproco. I fondamenti della meccanica classica non indicano alcuna ragione per un fatto osservato sperimentalmente; é stato infatti verificato che i sistemi inerziali sono assi di coordinate che, in media, risultano a riposo rispetto al cielo delle stelle fisse o presentano un moto rettilineo uniforme in loro riferimento.

Come fu subito riconosciuto, anche la teoria della Relatività Generale nella sua forma originale⁽³⁾ non assolverebbe la richiesta Machiana. Dopo che fu dedotta la precessione secolare del perielio di Mercurio, in stupefacente accordo con l'esperienza, ogni persona ingenua si deve essere chiesta: Rispetto a *cosa*, secondo la teoria, l'orbita del pianeta compie questa precessione, che si verifica, in accordo con l' *esperienza*, in riferimento al sistema delle stelle fisse? La risposta che si riceve è che la teoria richiede che la precessione si verifichi in riferimento a sistemi di coordinate in cui il potenziale gravitazionale soddisfa certe condizioni al contorno all'infinito. Comunque la connessione fra queste condizioni al contorno e la presenza delle masse delle stelle fisse non é in nessun modo chiara, poichè queste ultime non furono mai introdotte nel calcolo in alcun modo.

La via per superare questa difficoltà è oggi suggerita dalle teorie cosmologiche che richiedono un universo spazialmente chiuso e che quindi abbandonano del tutto le condizioni al contorno. A causa delle difficoltà concettuali che queste teorie cosmologiche ancora presentano⁽⁴⁾, e non da ultimo la difficoltà matematica della loro interpretazione, la soluzione di un importante problema epistemologico, che è immediatamente chiaro ad una persona educata in ambito scientifico, è così trasferita in un campo in cui pochi possono seguirla e in cui non è facile distinguere fra verità e fantasia. Non ho dubbi che quando la soluzione sarà finalmente raggiunta nell'ambito di queste teorie, essa non sarà solo soddisfacente ad alto livello, ma permetterà anche rappresentazioni in una forma più comprensibile a tutti. Comunque, date le condizioni attuali, non è del tutto scorretto chiedersi se una modifica parziale della meccanica classica possa soddisfare la richiesta machiana di relatività e rendere più comprensibile

⁽¹⁾L.Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, J.A. Barth, 1897

⁽²⁾E.Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig, F.A. Brockhaus, 3. Aufl. 1897. Vgl. bes. Kap. II.6

⁽³⁾A.Einstein, Ann. d. Phys. 49. S. 769. 1916

⁽⁴⁾H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. 39. - Berlin. J. Springer. 1923. Cf. confronta anche l'articolo 'Massenträgheit und Kosmos' dello stesso autore in *Naturwissenschaften* (1924, 12. Jahrgang

la determinazione dei sistemi inerziali per mezzo delle stelle fisse⁽⁵⁾.

Nella meccanica del punto materiale l'espressione dell'energia *potenziale* e, in particolare, l'espressione del potenziale Newtoniano già soddisfa il postulato machiano, poichè esso dipende dalla distanza relativa fra le due masse e non dalla loro posizione assoluta nello spazio. Da quando è stato provato, può essere ritenuto come punto fisso del postulato, fosse anche solo come prima approssimazione di una legge in realtà molto più complicata. La situazione è differente se si considera l'*Energia cinetica*. In accordo con la meccanica classica, essa è determinata dal moto assoluto nello *spazio*, mentre in principio sono osservabili solo moti *relativi*, distanze e variazioni di distanze fra punti materiali. Si deve dunque vedere se sia possibile rappresentare l'energia cinetica non come assegnata ai punti massivi individuali, ma piuttosto considerarla, proprio come è avvenuto fino a questo momento per l'energia potenziale, come una *energia di interazione* fra le due masse e fare in modo che essa dipenda dalla distanza e velocità reciproca fra i punti materiali. Al fine di selezionare un'espressione fra le molteplici disponibili, richiediamo le seguenti analogie:

1. L'energia cinetica, come un'energia di interazione, dipenderà dalle masse e dalla separazione spaziale dei due punti in maniera analoga a quello che accade per il potenziale newtoniano.
2. Sarà proporzionale al quadrato della variazione della distanza relativa.

L'energia totale di interazione di due punti materiali di masse μ e μ' posti alla distanza relativa r assumerà la forma:

$$W = \gamma \frac{\mu\mu' \dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r} \quad (1)$$

Le masse sono qui misurate in un'unità in modo tale che la costante di gravitazione abbia valore 1. La costante γ , che per ora è indeterminata, ha le dimensioni dell'inverso di una velocità. Poichè dovrebbe essere universale, ci aspetteremo che essa sia la velocità della luce a meno di un fattore numerico, o che γ si riduca ad un fattore numerico quando il secondo luce è scelto come unità di misura del tempo. Vedremo in seguito che il fattore numerico è uguale a 3.

Supponiamo ora che un punto materiale μ sia posizionato nelle vicinanze del centro di una sfera cava massiva di densità uniforme σ e di raggio R . Riferiamo ogni espressione ad un sistema di riferimento in cui la sfera è a riposo. Supponiamo che il punto materiale si muova in questo sistema di coordinate, le sue coordinate polari siano ρ , θ e ϕ , e quelle di un elemento di superficie della sfera siano R , θ' e ϕ' . La distanza r del punto dall'elemento di superficie è dato da

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos R\rho = R^2 + \rho^2 - 2R\rho[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')] \quad (2)$$

L'energia *potenziale* totale è la stessa in ogni punto, e non la consideriamo. Per differenziazione otteniamo

⁽⁵⁾La soluzione di questo problema è già contenuta nella formulazione della legge d'inerzia fornita da Mach. La ragione principale per cui essa abbia ricevuto così poca attenzione è presumibilmente dovuta al fatto che Mach credeva di dover adottare una influenza inerziale reciproca che fosse *indipendente dalla distanza* (loc. cit., p. 228 ff.)

$$\begin{aligned}
r\dot{r} = & \rho\dot{\rho} - R\dot{\rho}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')] - \\
& R\rho[-\sin\theta\cos\theta'\dot{\theta}' + \cos\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')\dot{\theta} - \sin\theta\sin\theta'\sin(\phi - \phi')\dot{\phi}]
\end{aligned}
\tag{3}$$

Poichè possiamo scegliere un'orientazione arbitraria del sistema di coordinate, è sufficiente fare il calcolo per $\theta = 0$. Inoltre, vogliamo calcolare i termini principali che rimangono quando $\rho \ll R$. Eliminiamo dunque tutti i termini con ρ eccetto quelli moltiplicati per $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. In questa approssimazione abbiamo anche $r = R$. Il che da

$$\dot{r} = -\dot{\rho}\cos\theta' - \rho\dot{\theta}\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \tag{4}$$

Tenendo poi presente la (1)

$$\begin{aligned}
W = & \frac{\gamma\mu\sigma R^2}{R} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' [\dot{\rho}^2 \cos^2\theta' + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta'\cos\theta'\cos(\phi - \phi') + \rho^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta' \cos^2(\phi - \phi')] \\
= & \frac{4\pi\gamma\mu\sigma R}{3} (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)
\end{aligned}
\tag{5}$$

Questo è esattamente il valore dell'energia cinetica in accordo con la meccanica classica a condizione che la massa m del nostro punto materiale (in grammi) sia data da

$$m = \frac{8\pi\gamma\sigma R}{3} \mu \tag{6}$$

Poichè ora, d'altra parte, in accordo con le assunzioni fatte per l'energia potenziale

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{k}} \tag{7}$$

dove k è l'usuale costante di gravitazione, dobbiamo avere

$$\frac{1}{k} = \frac{8\pi\gamma\sigma R}{3} \tag{8}$$

In modo alternativo, se introduciamo per σ l'usuale densità di superficie s

$$s = \frac{\sigma}{k} \tag{9}$$

otteniamo

$$\frac{4\pi s R^2}{R} = \frac{3}{2k\gamma} \tag{10}$$

e questa relazione la discuteremo in seguito. Se le masse sono espresse in grammi, l'energia totale di interazione diviene

$$W = \frac{\gamma k m m'}{r} \dot{r}^2 - \frac{k m m'}{r} \tag{11}$$

Se un punto massivo m (un pianeta) si muove nelle vicinanze di una massa maggiore m' (il sole), sarà necessario tenere in conto non solo l'energia cinetica (5) del punto materiale

in riferimento ‘all’orizzonte massivo’ ma anche la sua energia potenziale e cinetica (11) in riferimento a m' . L’energia totale nel ‘caso di un corpo singolo’ sarà

$$W = \left(\frac{m}{2} + \frac{\gamma k m m'}{r} \right) \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{k m m'}{r} \quad (12)$$

Oltre all’attrazione gravitazionale, la presenza del sole ha anche l’effetto di costringere il pianeta con una massa inerziale ‘radiale’ più grande di quella ‘tangenziale’. Usando la legge delle aree, che rimane invariata,

$$r^2 \dot{\phi} = f \quad (13)$$

e facendo la sostituzione

$$r^{-1} = \xi \quad (14)$$

otteniamo dopo l’eliminazione del tempo dalla (12) e dalla (13) nell’usuale maniera

$$(1 + 2\gamma k m' \xi) \left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2 + \xi^2 - \frac{2k m'}{f^2} \xi - \frac{2W}{m f^2} = 0 \quad (15)$$

Ponendo

$$\xi = \eta + \frac{k m'}{f^2}, \quad C = \frac{2W}{m f^2} + \frac{k^2 m'^2}{f^4} \quad (16)$$

otteniamo

$$d\phi = \frac{d\eta \sqrt{1 + 2\gamma k^2 m'^2 / f^2 + 2\gamma k m' \eta}}{\sqrt{C - \eta^2}} \quad (17)$$

che differisce dalla forma normale per la presenza della radice quadrata a numeratore. È facile mostrare che, una volta applicato all’orbita planetaria, questo fattore semplicemente rappresenta una piccola correzione a patto che γ abbia una grandezza paragonabile all’inverso della radice della velocità della luce. Possiamo dunque utilizzare l’approssimazione

$$\phi = \left(1 + \frac{\gamma k^2 m'^2}{f^2} \right) \sin^{-1} \eta - \gamma k m' \sqrt{C - \eta^2} + \text{cost} \quad (18)$$

Mentre il secondo termine a destra rappresenta solo una perturbazione *periodica* estremamente piccola, il primo termine fornisce una precessione secolare del perielio di grandezza pari a

$$\Delta = \frac{2\pi \gamma k^2 m'^2}{f^2} \quad (19)$$

per rivoluzione, nel senso di rivoluzione (ϕ passa nell’intervallo $2\pi + \delta$ prima di η e, dunque, anche r ritorna allo stesso valore e nella stessa fase di moto). Ora in accordo con la ben nota espressione

$$k m' = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}, \quad f = \frac{2\pi a b}{\tau} \quad (20)$$

e dunque

$$\frac{k^2 m'^2}{f^2} = \frac{4\pi^2 a^4}{b^2 \tau^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2(1-\epsilon^2)} \quad (21)$$

(τ, a, b, ϵ sono rispettivamente il periodo orbitale, i semiassi maggiore e minore, e l'eccentricità dell'ellisse). Questo da

$$\Delta = \frac{8\pi^3 \gamma a^2}{\tau^2(1-\epsilon^2)} \quad (22)$$

Siamo in accordo con la precessione del perielio dedotta dalla Relatività Generale⁽⁶⁾, i.e., nel caso dell'esperimento di Mercurio, se poniamo

$$\gamma = \frac{3}{c^2} \quad (23)$$

L'espressione (1) assume allora la forma definitiva

$$W = \frac{3\mu\mu' \dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r} \quad (24)$$

quando l'unità di tempo e di massa sono scelti in modo tale che la costante di gravitazione e la velocità della luce siano entrambe pari a 1. L'equazione (10) diviene

$$\frac{4\pi s R^2}{R} = \frac{c^2}{2k} = 6.7 \bullet 10^{27} c.g.s \quad (25)$$

Se assumiamo che 'l'orizzonte massivo' sia costituito da punti materiali e che vi sia una distribuzione irregolare delle loro velocità, che ad ogni modo, in riferimento ad un sistema di coordinate convenientemente scelto, non siano di un ordine di grandezza maggiore delle velocità con cui gli esperimenti vengono condotti nel centro della sfera, la modifica da apportare al risultato (5) nel caso di raggi R sufficientemente grandi non è niente altro che, in primo luogo, questo risultato vale per quel particolare sistema di coordinate fra quelli in cui il centro di gravità delle masse all'orizzonte è *a riposo* e, in secondo luogo, che vi è un termine costante addizionale derivante dalle velocità radiali delle masse all'orizzonte, ma che non ha effetto sul moto.

Inoltre, è chiaro che la distribuzione superficiale delle masse all'orizzonte può anche essere sostituita su larga scala da una distribuzione spaziale sfericamente simmetrica rispetto al punto di osservazione, a patto comunque che le condizioni siano tali per cui gli shell interni di questa distribuzione spaziale abbiano raggio R non ancora sufficientemente grande, in modo da giustificare le approssimazioni fatte prima, e soprattutto che forniscano solo contributi nulli all'effetto inerziale nel suo complesso. Sia d la densità spaziale di questa distribuzione in g/cm^3 ed R sia il suo raggio esterno; al posto della (25) otteniamo ovviamente

$$\int_0^R \frac{4\pi \rho^2 d}{\rho} d\rho = 2\pi R^2 d = \frac{c^2}{2k} = 6.7 \bullet 10^{27} c.g.s. \quad (26)$$

dove abbiamo integrato su una d che sia costante all'interno di R . Questa strana relazione asserisce che il potenziale (negativo) di tutte le masse nel punto di osservazione, calcolato con la costante di gravitazione *valida nel punto di osservazione*, deve essere uguale alla metà della radice quadrata della velocità della luce.

⁽⁶⁾A.Einstein, *loc. cit.*, final page

Una veloce approssimazione dell'integrale in (26) per le masse radianti del nostro sistema stellare dà il risultato 10^{16} c.g.s. Si é ammesso in questo calcolo che una sfera di raggio $R = 200$ parsec ($1 \text{ parsec} = 3.09 \bullet 10^{18} \text{ cm}$) è uniformemente riempita di stelle di massa pari a quella solare in modo tale che 30 di queste stelle si trovino all'interno di un raggio pari a 5 parsec. Se ne deduce che solo una frazione molto piccola degli effetti inerziali osservati sulla terra e nel nostro sistema planetario derivano dall'interazione con le masse stellari della Via Lattea. In riferimento all'ammissibilità delle idee sviluppate in questa sede, questo è un risultato incoraggiante. Perché se le condizioni scelte fossero diverse anche solo in grandezza, ci troveremmo in grande difficoltà a spiegare l'assenza di qualsiasi *anisotropia* dell'inerzia terrestre o planetaria. Una distribuzione massiva simile a quella indicata per le stelle radianti dovrebbe avere la conseguenza che i corpi siano sottoposti ad una maggiore resistenza inerziale *nel* piano galattico piuttosto che in una posizione esterna ad esso. La circostanza che noi non siamo esattamente nel centro di questa distribuzione massiva dovrebbe anche avere delle conseguenze simili. L'ordine di grandezza stabilito in precedenza penso che riduca l'anisotropia inerziale che deriva dalla distribuzione asimmetrica della nostra Via Lattea, quasi ai limiti dell'osservabilità astronomica, come si può brutalmente stimare comparandola con l'anisotropia della massa di Mercurio, che é stata correttamente stabilita.

In ogni caso sembra che la questione del perché i nostri sistemi inerziali siano irrotazionali rispetto al *nostro* sistema stellare (o esso rispetto a loro) ricompare se essi fondamentalmente non sono 'ancorati' a quel particolare sistema ma piuttosto a masse stellari molto più distanti. La ragione, o meglio, lo stato attuale delle cose dal nostro punto di vista totalmente semplificato e elementare, è evidentemente che nell'esperienza si osservano velocità relative fra stelle in generale estremamente piccole, più propriamente, velocità che sono molto inferiori a quella della luce. La nostra espressione (24) non ci permette di riconoscere nessuna ragione per questo stato di cose.

Comunque, una tale ragione appare abbastanza naturalmente se alla conoscenza meccanica del nostro sistema solare, che è tutto ciò che abbiamo utilizzato finora, aggiungiamo su una base puramente empirica le osservazioni di un aumento dell'inerzia una volta che si raggiungano velocità prossime a quelle della luce (esperimenti di deflessione con elettroni). Questi esperimenti mostrano che l'espressione (24) è da considerarsi un'approssimazione per basse velocità, e richiede una correzione per grandi $\dot{r}$, cioè quando tende ad 1. Se guardiamo la formula 'relativistica' dell'energia come un'espressione delle osservazioni,

$$Kin.En. = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (27)$$

è facile modificare la (24) in modo da ottenere la (27) per velocità arbitrarie. Poniamo

$$W = \frac{\mu\mu'}{r} \left(\frac{2}{(1 - \dot{r}^2)^{3/2}} - 3 \right) \quad (28)$$

qui sostituiamo $\dot{r}$ in accordo con la (4) e compiamo il calcolo analogo alla (5) [non considerando il secondo termine in parentesi nella (28) che fornisce solo una costante]:

$$W = \frac{2\mu\sigma R^2}{R} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{(1 - [\dot{\rho} \cos \theta' + \rho \dot{\theta} \sin \theta' \cos(\phi' - \phi)]^2)^{3/2}} \quad (29)$$

Se poniamo in primo luogo

$$x = \cos \theta', \quad y = \sin \theta' \cos(\phi' - \phi) \quad (30)$$

allora x ed y percorrono la superficie circolare di raggio unitario *due volte* quando θ' e ϕ' percorrono completamente il loro range di valori. Otteniamo

$$W = 4\mu\sigma R \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{(1 - [\dot{\rho}x + \rho\dot{\theta}y]^2)^{3/2} \sqrt{1-x^2-y^2}} \quad (31)$$

Introduciamo ora per x ed y 'le coordinate polari sul piano' r e ψ e notiamo che in luogo di r conviene utilizzare immediatamente

$$\sqrt{1-r^2} = z \quad (32)$$

come variabile. Questo da

$$\begin{aligned} W &= 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{dz}{(1-a^2+a^2z^2)^{3/2}} \\ &= 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-a^2} = 4\mu\sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi'}{1-v^2 \cos^2 \psi'} \end{aligned} \quad (33)$$

con le abbreviazioni

$$a = \dot{\rho} \cos \psi + \rho \dot{\theta} \sin \psi, \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} \quad (34)$$

Si vede allora, in modo molto facile con un'espansione in serie dell'ultimo integrale (o per calcolo diretto o tramite integrazione nel dominio complesso), che si ha

$$W = \frac{8\pi\mu\sigma R}{1-v^2} = \frac{8\pi\mu\sigma R}{\sqrt{1-\dot{\rho}^2-\rho^2\dot{\theta}^2}} \quad (35)$$

che in accordo con la (6) e la (23) coincide con la parte variabile della (27), poichè nel nostro calcolo abbiamo considerato la velocità della luce pari ad uno fin dall'inizio.

Ricordiamo in breve che all'espressione (28) corrisponde una funzione Lagrangiana

$$L = \frac{\mu\mu'}{r} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\dot{r}^2}} - 4\sqrt{1-\dot{r}^2} + 3 \right) \quad (36)$$

che soddisfa l'equazione

$$\dot{r} \frac{dL}{d\dot{r}} - L = W = \frac{\mu\mu'}{r} \left(\frac{2}{(1-\dot{r}^2)^{3/2}} - 3 \right) \quad (37)$$

Se L é integrata in accordo con la (36), nella stessa maniera di W nell'interazione della nostra massa con la sfera cava, otteniamo, a meno di una costante, la ben nota lagrangiana in forma relativistica per un punto materiale:

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} \quad (38)$$

dove β è ancora il rapporto fra la velocità della particella e la velocità della luce.

La più seria obiezione che si può fare contro le possibilità concettuali sviluppate in questa nota è che esse sembrano poggiare sul principio dell'azione istantanea a distanza che fino ad oggi è inaccettabile. È ovvio che oggi giorno nessuno, il presente autore incluso, può concepire le assunzioni (1), (11) ... esattamente in questo senso. Ma proprio nella medesima maniera

in cui siamo convinti che una stella molto distante eserciti una piccola e apparentemente istantanea influenza su un pendolo attraverso il suo campo gravitazionale, anche quando la gravitazione in verità si propaga solo con la velocità della luce, proprio nella stessa maniera possiamo, credo, calcolare con i termini in $\dot{r}$ delle nostre espressioni senza peccare nei confronti del principio base della propagazione finita delle influenze *a patto che* le condizioni siano tali che in media non sia importante se calcoliamo con gli stati di moto istantanei o ritardati delle masse distanti.

In altri casi, si potrebbero incontrare certe difficoltà iniziali se uno volesse tenere in conto seriamente il tempo ritardato. È allora in principio impossibile stabilire $\dot{r}$. Si potrebbe definirlo solamente in modo empirico con l'effetto Doppler osservato, ma per due osservatori su due punti materiali differenti che si spediscono segnali luminosi l'un l'altro, l'effetto non è lo stesso 'nello stesso istante'. L'energia cinetica dell'interazione, che all'inizio abbiamo messo insieme in un singolo termine, poi necessariamente si spezza in due. Si può anche notare che la ragione per la differenza dell'effetto Doppler, se le due masse presentano la medesima massa, può solo essere riconosciuta nella presenza di tutte le altre masse, che d'altronde devono definire un sistema di riferimento per la luce proprio come nel caso del moto della particella singola.

Io credo che sviluppando ulteriormente queste idee si arrivi alla fine, con certe modifiche, alla teoria generale della relatività. Poichè questa rappresenta una struttura che difficilmente sarà in futuro completamente superata da una qualsiasi teoria, ma oggi è senza dubbio ricca di concetti da sviluppare. Io considero l'idea presa in esame qui – che il cambio dello stato di moto relativo, non assoluto, dei corpi richiede una spesa di lavoro – sia almeno uno stadio intermedio utile e consentito che permette, in un modo semplice ma allo stesso tempo preciso, di concepire condizioni empiriche per mezzo di concetti familiari a chiunque.