

Renn - Before The Riemann Tensor.

Rev 1.0

1. Introduzione.

Nell'affrontare lo studio della Relatività Generale (1907-15) sorge spesso la domanda di come sia possibile descrivere in modo affidabile la sua nascita, di come Einstein sia riuscito a formulare una teoria totalmente nuova e ad esplorare zone dell'esperienza fisica ancora sconosciute. Infatti sia gli strumenti matematici applicati allo studio gravitazionale – vedi ad esempio l'utilizzo dello spazio-tempo curvo – sia l'esperienza fisica (cfr. ad esempio l'incurvamento dei raggi luminosi) erano all'epoca o totalmente sconosciuti o abbozzati nel loro sviluppo.

Lo strumento classico per compiere questa descrizione è il modello della logica formale: si ipotizza infatti che il processo seguito dallo scienziato per giungere ad una scoperta sia un percorso rigido e lineare (seppure faticoso), formato da una griglia di concetti fra di loro interconnessi che conducono a conseguenze logiche inevitabili. Questo modello nasce dalla ricostruzione storica che ha la tendenza a riassumere il faticoso procedere della ricerca scientifica (con tentativi e fallimenti) in strutture rigide e consequenziali. La principale debolezza del modello risiede nel fatto che la pratica scientifica, ed il percorso seguito da Einstein per giungere alla Relatività Generale lo dimostra, è un continuo riformulare i concetti, le strutture matematiche e le conseguenze empiriche. Queste continue modifiche rendono inutilizzabile una struttura rigida come quella Logica, in quanto ogni modifica della struttura implicherebbe il crollo della stessa ed una sua conseguente riformulazione assai dispendiosa.

La rigidità del modello logico viene superata con alcuni strumenti più flessibili della Scienza Cognitiva. Nelle pagine seguenti utilizzeremo in special modo il Modello Mentale: esso è concepito come una struttura di conoscenza composta da 'slots' che possono assumere sia un'informazione empirica già acquisita sia 'Assunzioni di default' che derivano da esperienza precedenti. I 'defaults' possono essere sostituiti da nuove informazioni (o dalle stesse assunzioni riconsiderate) in modo tale che la struttura del modello rimanga intatta. Applicando il concetto di Modello Mentale alla Storia della Fisica si assume che gli 'slots' (le informazioni contenute nel modello) siano dei 'frames' (vedi Minsky) concepiti qui come agglomerati di conoscenza ancorati al sapere condiviso della Comunità Scientifica.

Riferendoci al particolare caso studiato, i vantaggi del modello mentale su quello logico si riconducono ai seguenti:

- La Meccanica Classica e la Relatività Ristretta costituiscono la conoscenza condivisa della comunità scientifica a partire dalla quale Einstein estrae ed utilizza un insieme di schemi (frames) relativamente stabili che possono essere applicati a nuovi contesti (ad es. la ricerca delle equazioni di campo per la gravità).
- Le stesse strutture possono rappresentare delle 'euristiche' che guidano la ricerca in campi inesplorati.

2. Il Modello di Lorentz.

Il modello mentale che fu cruciale allo sviluppo della Relatività Generale ha le sue radici nella fisica di fine 800. La Meccanica Classica in primo luogo fornisce le conseguenze empiriche oramai assodate e verificate della teoria gravitazionale elaborata da Newton e dai fisici del 700: una nuova

teoria sulla gravità deve ridursi ad essa sotto particolari condizioni. Inoltre la Meccanica di fine 800 presenta i concetti fondamentali su cui costruire una teoria gravitazionale:

1. l'individuazione di una sorgente (massa gravitazionale)
2. la deduzione di un'equazione per la propagazione dell'interazione gravitazionale (Il Potenziale descrive l'interazione e l'equazione è data da quella classica di Poisson).
3. la formulazione di un'equazione del moto per una particella che subisce l'interazione gravitazionale (eq. classica di Newton).

Questi tre assunti entrano in crisi durante la seconda metà dell'800 grazie alla nascente teoria elettro-magnetica di Maxwell che si fonda sul concetto di campo (mentre la tradizionale teoria gravitazionale si basava sul concetto di forza). La teoria elettro-magnetica raggiunge la sua massima espressione con il lavoro del fisico olandese Lorentz, che fornisce un quadro completo ed esaustivo – a meno dei fenomeni legati alla Relatività Ristretta – degli eventi elettromagnetici. Einstein considera i successi di Lorentz come il punto di partenza per il suo lavoro sulla relatività, e a partire dal 1907 ha come fine ultimo la costruzione di una teoria di campo dell'interazione gravitazionale sulla falsa riga della teoria elettromagnetica. Per questo motivo il modello mentale utilizzato da Einstein nella sua ricerca prende il nome di **Modello di Lorentz**.

Anche la teoria elettromagnetica si basa sui tre concetti messi in evidenza per la teoria di Newton, che ora assumono dei valori differenti.

1. l'individuazione di una sorgente (densità di carica + densità di corrente)
2. l'equazione di campo è data dall'equazione di Maxwell ed il campo è quello elettromagnetico
3. l'equazione che descrive il moto di una particella carica immersa in un campo elettromagnetico è data dall'equazione di Lorentz.

Il fatto che sia la Teoria classica gravitazionale sia la teoria di Maxwell sui fenomeni elettromagnetici si basi su schemi simili (i tre punti messi in evidenza) ma con valori differenti per i singoli concetti, ci porta ad esplicitare tali schemi attraverso gli script di Minsky nel modo seguente. L'equazione che descrive la generica interazione (punti 1 e 2) corrisponde allo schema:

$$\mathbf{GRAV}(\mathbf{POT}) = \mathbf{MASS} \quad (1)$$

Dove **MASS** è lo **slot** che rappresenta la sorgente; **POT** è lo **slot** corrispondente alla funzione che descrive l'interazione (funzione Potenziale o campo); ed infine **GRAV** è l'operatore matematico che agendo su POT genera le equazioni che descrivono l'interazione.

Il terzo concetto invece è descritto dallo schema:

$$\mathbf{F} = \mathbf{MASS} \mathbf{DEV}(\mathbf{POT}) \quad (2)$$

Dove in questo caso lo **slot F** rappresenta la forza che agisce sulla particella di prova con massa descritta dallo **slot MASS**. L'operatore **DEV** infine agisce sullo **slot POT** che presenta il significato messo in evidenza nello schema (1).

Limitandoci al caso della teoria gravitazionale classica, gli schemi (1) e (2) corrispondono alle equazioni:

$$\nabla^2 \varphi = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_i = 4\pi G \rho \quad (1.a)$$

$$f_i = m \, dv_i / dt = - m (\partial/\partial x_i) \varphi \quad (2.a)$$

dove φ rappresenta il potenziale gravitazionale, ρ la densità di materia (la sorgente dell'interazione); f la forza che agisce sulla particella di massa m .

Ma qual è il vantaggio dell'utilizzo degli script (1) e (2) per descrivere l'attività di uno scienziato e di Einstein in particolare? La risposta è abbastanza semplice in quanto lo scienziato tedesco ha la possibilità di compiere una serie di tentativi (una serie di modelli) cambiando di volta in volta i valori degli slot, senza per questo inficiare la bontà degli schemi. Infatti se la scelta di un valore da associare ad uno slot conduce ad una

considerazione illogica, oppure ad una conseguenza empirica fallace, il valore si può modificare mantenendo intatta la bontà dello script.

Si osservi ad esempio che fin dai primi tentativi intorno al 1910, Einstein è conscio che per quanto riguarda lo script (1) due slot su tre sono nell'insieme conosciuti. Mi riferisco al temine **MASS** e **POT** che sono dati rispettivamente dal tensore Energia-impulso e dal tensore metrico. Rimane incerto il valore da associare all'operatore **GRAV** che occuperà la sua attenzione per diversi anni.

Accanto agli script messi in evidenza la ricerca Einsteniana è guidata da un gruppo di euristiche che rappresentano un tema tipico del suo pensiero. Vediamo di esplicitarle in quanto rappresentano un punto importante per capire la strategia che conduce alle equazioni di campo per la teoria gravitazionale. Esse sono elencate qui di seguito:

1. Il Principio di Relatività Generale. Le equazioni di campo (schema 1.) e le equazioni del moto (schema 2.) devono essere covarianti per trasformazioni generiche.
2. Il Principio di Corrispondenza. Le nuove equazioni si devono ricondurre a quelle della teoria gravitazionale classica.
3. Il Principio di Conservazione dell'Energia. Devono rimanere validi i classici principi di conservazione dell'impulso e dell'energia (sebbene espressi in forma differente).
4. Il Principio di Equivalenza. Il principio di equivalenza (espresso nella forma più semplice come equivalenza fra massa gravitazionale e massa inerziale) deve essere sempre valido.

L'interazione fra gli script e le euristiche guida Einstein alla scoperta della relatività generale. Nelle pagine seguenti ci limiteremo ad analizzare brevemente i primi tentativi di Einstein nella ricerca delle equazioni di campo (schema 1.) come sono espressi nelle prime pagine dello **Zurich Notebook**.

Einstein utilizza una 'doppia strategia' per giungere alle equazioni finali della Relatività Generale: due strategie che interagiscono l'un l'altra conducendolo passo dopo passo alla soluzione finale.

La prima strategia può essere definita **Fisica** in quanto a partire dai risultati della Meccanica Classica (espressi in forma tensoriale per corrispondenza con la Teoria del 1905) si impongono i principi di conservazione dell'energia e si valutano le nuove informazioni ottenute con un occhio particolare alla struttura formale ottenuta. I risultati devono soddisfare il Principio di Relatività generale.

Accanto a questa strategia se ne affianca una **matematica** che consiste nella costruzione di un'interpretazione fisica per oggetti matematici che ne sono privi (si ricordi che a inizio 900 la geometria differenziale Non Euclidea compie i suoi primi passi in Fisica) grazie all'applicazione del Principio di Corrispondenza.

3. Learning from a dilemma

Nella prima parte dello Zurich Notebook, prima che inizi lo studio del Tensore di Riemann, Einstein si concentra nella costruzione delle equazioni di campo per l'attrazione gravitazionale seguendo lo schema (1) messo in evidenza nel paragrafo precedente.

Riflette in special modo sull'operatore matematico **GRAV** e sul default che deve assumere lo slot **POT**. Sono gli anni intorno al 1912 e l'interesse è dunque rivolto alla formulazione della teoria del campo gravitazionale statico con l'aiuto della geometria tensoriale, e all'utilizzo del tensore metrico come possibile espressione del Potenziale gravitazionale. Il lavoro su questi due aspetti si svolge attraverso la duplice strategia messa in evidenza nel paragrafo precedente e conduce Einstein ad un dilemma che lo porterà ad abbandonare la strada intrapresa (quella degli Invarianti di Beltrami) ma che gli insegnerà come affrontare l'interpretazione di oggetti matematici complessi come il Tensore di Riemann (cfr ad esempio le condizioni sulle coordinate).

Sul finire del 1912 Einstein ha sviluppato una teoria del campo gravitazionale statico che si basa sul Principio di Equivalenza (scoperto nel 1907) e che conduce ad una serie di riscontri in attesa di verifica sperimentale (ad es. l'incurvamento dei raggi luminosi). Einstein inoltre ha raggiunto una serie di conclusioni su come debba essere la futura teoria del campo gravitazionale che gli impediscono di seguire le vie intraprese dai suoi contemporanei. Mi riferisco ad esempio al fatto che il candidato naturale per descrivere il campo gravitazionale non è una funzione scalare come in precedenza, ma piuttosto il tensore metrico (10 funzioni) di cui Einstein in ogni caso ha per ora una conoscenza rudimentale. Questo spiega il motivo per cui le prime pagine dello Zurich Notebook siano volte ad esprimere i risultati raggiunti in termini tensoriali. Il primo problema da affrontare è dunque il seguente: le equazioni del campo gravitazionale statico sono equazioni scalari, quindi l'operatore matematico che si deve associare a **GRAV** è un operatore che agisce su scalari, mentre Einstein è convinto che il termine da associare a **POT** sia il tensore metrico. Ci troviamo dunque nella difficoltà di avere un operatore che agisce su scalari, mentre invece dovrebbe agire su tensori: è necessario costruire un operatore corretto.

L'equazione di campo del 1912 presenta un'ulteriore problema: non soddisfa il requisito di covarianza che è una delle euristiche fondamentali del procedere einsteiniano.

Nello Zurich Notebook si osserva che ad un certo punto Einstein si interessa del secondo invariante di Beltrami: questo operatore soddisfa sia alla richiesta di covarianza, sia il requisito di operare su scalari. Costruire dunque un'equazione di campo con l'Invariante di Beltrami rappresenta il primo passo significativo per esprimere le equazioni del 1912 in forma tensoriale. A questo punto interviene il Principio di Corrispondenza al fine di assicurare che le nuove equazioni abbiano un corrispettivo classico; esso mantiene la sua validità solo riducendo le equazioni sviluppate in **coordinate armoniche**.

Si osservi che ora Einstein sta applicando la **strategia matematica** in quanto a partire da un operatore matematico (che non presenta alcuna interpretazione fisica, ma che soddisfa alcune proprietà formali quali la covarianza) applica il Principio di Corrispondenza per ottenere una corretta interpretazione dell'oggetto e per dare validità al suo ragionamento.

Rimane in ogni caso il problema che l'operatore scalare di Beltrami non può agire sul tensore metrico.