

Considerazioni su una nota di Einstein del 1912^(*)

Nel 1912 Einstein pubblica una serie di articoli sul campo gravitazionale statico che terminano con una nota su un ipotetico effetto gravitazionale simile all'induzione elettromagnetica; in esso, per la prima volta, compaiono alcune considerazioni che si riallacciano all'analisi machiana sull'inerzia. Nella *Meccanica nel suo sviluppo storico-critico* Mach aveva analizzato a fondo i fondamenti della fisica classica e in alcune pagine sembrava suggerire un'idea del tutto inusuale: le proprietà inerziali di un corpo sono in qualche modo legate alla presenza delle altre masse dell'universo. Nell'articolo citato Einstein considera un guscio sferico di materia K , un punto massivo P al suo interno e si domanda se un moto accelerato di K possa avere una qualche influenza sul comportamento inerziale di P .

Il ragionamento einsteiniano parte dalla considerazione che l'energia gravitazionale possa essere trattata alla stessa stregua di quella della Relatività ristretta; questo è un risultato che Einstein raggiunge già nel 1907 tentando di estendere il più possibile la teoria appena sviluppata (confronta la nota "I risultati di Einstein del 1907"). Egli infatti nel primo punto dell'articolo nota che "*in accordo con la teoria della relatività, la massa inerziale di un sistema fisico chiuso dipende dal suo contenuto di energia in modo tale che un aumento di energia pari ad E aumenterà la massa inerziale di $\frac{E}{c^2} \dots$* " e poi prosegue notando che se M è la massa inerziale del guscio sferico in assenza del punto materiale e se m è la massa di P in assenza di K , avremo che la massa del sistema totale, considerando i due oggetti molto lontani l'uno dall'altro, è data dalla somma $(M + m)$. Siccome però ci troviamo nella condizione con P all'interno di K , dovremo valutare in qualche modo il fatto che le due masse sono ora vicine. Tenendo presente da un lato che l'energia 'gravitazionale' per portare P all'infinito è pari a $\frac{kMm}{R}$ – dove k è la costante di gravitazione universale ed R il raggio del guscio sferico – e dall'altro che Einstein considera l'energia gravitazionale come un'energia qualsiasi, se ne deduce che la massa inerziale del sistema con P posizionato nel centro di K è:

$$M + m - \frac{kMm}{Rc^2} \quad \dots \quad (1)$$

Questo è il primo punto del ragionamento einsteiniano.

Dopo aver introdotto le equazioni che descrivono il moto di un punto materiale all'interno di un campo gravitazionale statico

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right] = \frac{-\frac{dc}{dx}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \frac{R_x}{m} \quad , \quad etc. \quad (2)$$

viene proposta l'energia cinetica di P

$$L = \frac{m}{2} q^2 \frac{c_0}{c} \quad (3)$$

(*) Einstein, Albert, *Prinzipiellen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik 55,(1918)

Dove q è la velocità della particella, c_0 la velocità della luce all'infinito – considerata come la sua velocità nel nostro potenziale gravitazionale – e c la velocità della luce nel campo generato dall'interazione fra il guscio K ed il punto P . Per conoscere dunque la forma dell'energia cinetica in un punto qualsiasi è necessario riuscire a determinare come varia la velocità della luce nei punti dello spazio. Qui è evidente un ulteriore risultato raggiunto da Einstein negli anni precedenti: a partire dal 1911, infatti, egli è del tutto consapevole che il valore della velocità della luce dipende dal campo gravitazionale in cui essa è misurata, quindi in ultima analisi è una funzione delle coordinate spaziali.

Al fine di ottenere la funzione $c(x, y, z)$ Einstein approssima le equazioni (Eq2) per un punto sufficientemente lento e soggetto solamente al campo gravitazionale, ottenendo:

$$\ddot{x} = -c \frac{dc}{dx} \quad , \quad etc \quad (4)$$

Il passo successivo è sostituire l'accelerazione subita dal corpo con la variazione lungo le x del potenziale gravitazionale Φ ,

$$\frac{d\Phi}{dx} = c \frac{dc}{dx} \quad , \quad etc \quad (5)$$

L'integrazione della (??) è piuttosto semplice e fornisce il risultato voluto

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{\Phi_0 - \Phi}{c_0^2} \quad (6)$$

Rimane da valutare la differenza $(\Phi_0 - \Phi)$, ma essa è pari a $\frac{kM}{R}$ all'interno del guscio e quindi, in definitiva, l'energia cinetica del punto materiale P assume la forma

$$L_p = \frac{m}{2} q^2 \left(1 - \frac{kM}{Rc_0^2}\right) \quad (7)$$

da cui si deduce che la massa inerziale è

$$m' = m + \frac{kmM}{Rc_0^2} \quad ... \quad (8)$$

In seguito alla (??) Einstein osserva che ci troviamo di fronte ad un risultato di grande interesse: *“Si nota infatti che la presenza del guscio K aumenta la massa inerziale di un punto P al suo interno. Ciò suggerisce che l'intera inerzia di un punto materiale è un effetto della presenza di tutte le altre masse, risultante da un certo tipo di interazione con esse”* (in nota viene citato Mach come precursore di questa idea).

Per concludere notiamo che la (??) nasce da tre assunti fondamentali:

1. L'energia gravitazionale è trattata nella stessa maniera dell'energia della Relatività Ristretta
2. Sono valide in prima approssimazione le equazioni (2) per un campo gravitazionale statico
3. Si assume che la velocità della luce non sia costante ma vari in presenza di un campo gravitazionale

Un'ultima osservazione si deve ancora compiere. Nel ricercare la forza inerziale che subirebbe il punto P se il guscio sferico viene accelerato, Einstein ammette fin dall'inizio che questo risultato sia corretto; infatti considera la forza F che agisce su K come la combinazione lineare delle due accelerazioni Γ e γ di K e P rispettivamente.