

I risultati di Einstein del 1907^(*)

Nel 1905 Einstein pubblica una serie di articoli che aprono la strada ad innovative ricerche fisiche e propongono una rivoluzionaria visione della realtà tuttora attuale; fra di essi è da menzionare l'articolo sull'elettrodinamica dei corpi in movimento comparso sugli *Annalen der Physik* che lo fece assurgere ad una inaspettata fama internazionale (Einstein, Albert, *Annalen der Physik*, 17, (1905)). In esso Einstein critica la visione tradizionale della Meccanica classica concentrandosi in special modo sullo studio del moto assoluto; la fisica newtoniana infatti considerava i fenomeni fisici come una 'trama', riducibile a movimento, che si svolgeva su un palcoscenico fisso rappresentato dallo spazio e dal tempo assoluti. Questi concetti non erano direttamente osservabili – come aveva indicato lo stesso Newton – ma abitualmente venivano associati ad un sistema di riferimento 'privilegiato' che fisicamente corrispondeva alla sfera delle stelle fisse. Rispetto a questo sistema di riferimento le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni di Galileo, cioè assumono la medesima forma se da un sistema di riferimento fisso si passa ad un sistema in moto uniforme con una trasformazione lineare delle coordinate:

$$\begin{aligned}x' &= x + vt \\ t' &= t\end{aligned}\tag{1}$$

dove (x, t) rappresenta il primo sistema di coordinate, (x', t') il secondo sistema di riferimento e v la velocità fra i due (si tralasciano in questa nota le trasformazioni per le componenti y e z). Vale dunque il *Principio di Relatività Galileiano*: esiste una particolare classe di sistemi di riferimento – i sistemi Inerziali – fra loro equivalenti, cioè la fisica descritta in ognuno di essi è la medesima, e legati fra loro da trasformazioni di coordinate lineari descritte dalla (1) – i sistemi sono in moto relativo rettilineo uniforme.

Mentre le leggi della Meccanica sono 'covarianti' rispetto alle trasformazioni di Galileo, quelle dell'elettromagnetismo presentano un diverso comportamento. Nell'articolo del 1905 Einstein supera questa contraddizione e riesce ad estendere la classe di equivalenza dei sistemi di riferimento: considera sempre l'insieme di sistemi inerziali, cioè quei particolari riferimenti che sono in quiete o risultano in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, ma modifica le trasformazioni che li collegano. Egli infatti non utilizza le (1), ma alcune particolari trasformazioni individuate per la prima volta da Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{2}$$

(*) *Sottile il signore*, A. Pais, 193-200

In questo modo il *Principio di Relatività* viene esteso, non tanto ad includere nuovi sistemi di riferimento, ma per soddisfare un bisogno estetico; si richiede in breve che tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme siano fra loro equivalenti nella descrizione dei fenomeni naturali.

La *Relatività Ristretta* (quella del 1905) prende in esame i fenomeni meccanici, quelli termici, idrodinamici e elettromagnetici ma trascurava sistematicamente la gravitazione: quest'ultima verrà inclusa nella teoria solo nel 1915 quando Einstein formulerà la *Relatività Generale*. I primi tentativi sono comunque compiuti già nel 1907, in un articolo di rassegna pubblicato per lo *Jahrbuch* (*Jahrbuch der Radioactivitat und Elektronik*, 4, 411(1907)) dove Einstein cerca di estendere il più possibile i domini di validità della teoria appena sviluppata. In questo articolo sono presenti alcuni risultati fondamentali che egli riprenderà in lavori successivi e che lo allontaneranno sempre più dal punto raggiunto nel 1905 (spostamento gravitazionale verso il rosso della luce, curvatura dei raggi luminosi, energia gravitazionale trattata come l'energia della Relatività Ristretta ...). Queste estensioni, comunque, non sono completamente spiegabili se non si nota che a novembre dello stesso anno (1907) egli concepisce per la prima volta il *Principio di Equivalenza*. Come ciò sia avvenuto ce lo descrive lo stesso Einstein nel manoscritto *Morgan* (conservato alla Morgan Library di New York):

Fu allora che ebbi il pensiero più felice della mia vita, nella forma seguente. Il campo gravitazionale ha solo una esistenza relativa, in modo analogo al campo elettrico generato dall'induzione magnetoelettrica. Infatti per un osservatore che cada liberamente dal tetto di una casa non esiste – almeno nelle immediate vicinanze – alcun campo gravitazionale [corsivo di Einstein]. In effetti, se l'osservatore lascia cadere dei corpi, questi permangono in uno stato di quiete o di moto uniforme rispetto a lui, indipendentemente dalla loro particolare natura chimica o fisica (in questo genere di considerazioni, ovviamente si trascura la resistenza dell'aria). L'osservatore di conseguenza ha il diritto di interpretare il proprio stato come uno 'stato di quiete'. Grazie a questa idea, quella singolarissima legge sperimentale secondo cui, in un campo gravitazionale, tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, veniva improvvisamente ad acquistare un significato fisico profondo. Precisamente, se vi fosse anche un solo oggetto che cadesse nel campo gravitazionale in modo diverso da tutti gli altri, allora, grazie ad esso, un osservatore potrebbe accorgersi di trovarsi in un campo gravitazionale e di stare cadendo in esso. Se però un oggetto del genere non esiste, come si è mostrato sperimentalmente con grande precisione, allora l'osservatore non dispone di elementi oggettivi che gli consentano di stabilire che si trova in caduta libera in un campo gravitazionale. Piuttosto ha il diritto di considerare il proprio stato come uno stato di quiete e il proprio spazio ambiente come libero da campi, almeno per quanto riguarda la gravitazione. L'indipendenza dell'accelerazione di caduta dalla natura dei corpi, ben nota sperimentalmente, è pertanto un solido argomento in favore dell'estensione del postulato di relatività a sistemi di coordinate in moto non uniforme l'uno relativamente all'altro.

È dunque grazie al Principio di Equivalenza che Einstein riesce ad estendere quello di Relatività e nel medesimo tempo ad includere, almeno in modo euristico, la gravitazione nella teoria. Ripercorriamone i passaggi. Egli nota innanzi tutto che le sue considerazioni nascono da una riflessione sull'analogia della presenza di un campo elettrico per effetto del moto di un conduttore in un campo magnetico (induzione magnetoelettrica) e la presenza di un campo gravitazionale. Entrambi, secondo Einstein, hanno una esistenza relativa ad un certo stato di moto. Mentre l'induzione elettrica è generata dalla variazione dell'intensità del

campo magnetico – e si verifica sia variando l'intensità, la direzione o il verso del campo che muovendo il conduttore (soprattutto quest'ultimo caso è da prendere in esame per l'analogia), Einstein nota che il campo gravitazionale può considerarsi nullo nelle vicinanze di un oggetto (osservatore) in caduta libera in un campo gravitazionale esterno. Abbiamo dunque una duplice descrizione del medesimo fenomeno: da un lato si ha un osservatore in quiete che vede cadere l'oggetto in un campo gravitazionale, dall'altro l'oggetto – e l'osservatore ad esso associato – che non vede alcun campo gravitazionale e si considera in quiete.

In conclusione possiamo stabilire l'*equivalenza* fra un sistema in quiete e un riferimento in caduta libera in quanto non vi è alcun esperimento fisico che possa distinguere fra i due – la seconda parte dell'argomentazione riportata. In questo modo riusciamo sia ad estendere il principio di relatività a sistemi in moto uniformemente accelerato, sia ad includere la gravità nello studio sull'equivalenza fra sistemi di riferimento. Infatti il Principio di Relatività ora non considera solo i sistemi di riferimento inerziali e le trasformazioni di Lorentz che li connettono, ma anche riferimenti in moto uniformemente accelerato. Il motivo di questa estensione risiede nel fatto che la fisica descritta con i primi deve essere uguale a quella descritta nei secondi come ci dimostra l'esempio einsteiniano dell'uomo in caduta libera.

Ma questo allargamento della classe di equivalenza dei sistemi di riferimento ha anche un'importante conseguenza: essa permette di includere nella trattazione il fenomeno fisico della gravità. Infatti un sistema accelerato in modo costante e un riferimento inerziale immerso in un campo gravitazionale sono fra loro equivalenti come ci dimostra il noto esempio dell'ascensore proposto da Einstein più volte. Seguiamo ancora una volta il suo ragionamento. Consideriamo un osservatore posto in un ascensore con nessuna possibilità di comunicare con l'esterno. L'uomo all'interno ha a disposizione alcune biglie che tiene in mano e che lascia cadere sul pavimento dell'ascensore; come interpretare questo fenomeno? L'osservatore ha due possibilità: può da un lato immaginare che l'ascensore sia in quiete e che si eserciti un campo gravitazionale che fa cadere con una certa velocità le biglie, oppure – ottenendo il medesimo risultato – può pensare che l'ascensore sia trainato verso l'alto con una accelerazione simile a quella ipotizzata nel primo caso.

Da questo semplice esperimento mentale si deduce che studiare il fenomeno fisico della gravità equivale a studiare il comportamento di sistemi di riferimento in moto uniformemente accelerato. Ritorniamo ora ai risultati raggiunti da Einstein nella rassegna del 1907. Essi sono ora pienamente comprensibili in quanto rappresentano l'applicazione del Principio di Equivalenza ai sistemi di riferimento in moto accelerato.

Si considerino al riguardo due sistemi di coordinate $S(x, y, z, t)$ e $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ che siano coincidenti e dotati di velocità $v = 0$. Si sincronizzino inoltre gli orologi di S e Σ in modo tale che $t = \tau = 0$. Immaginiamo in seguito che il sistema S rimanga in quiete, mentre Σ si muova di moto accelerato con accelerazione γ costante lungo le x . Prendiamo ora in esame un terzo sistema di riferimento $S'(x', y', z', t')$ che si muova con velocità costante rispetto a S e in modo tale che ad un istante fissato t venga a coincidere con il sistema Σ ; in questo modo allora $v = \gamma t$. Immaginiamo inoltre che nel momento del contatto gli orologi di S' siano sincronizzati con quelli di Σ .

Siamo ora in grado di valutare alcuni effetti che si verificano nel passaggio da S a Σ tramite il sistema S' rispetto a cui valgono ancora i risultati della Relatività Ristretta

1. Consideriamo un intervallo di tempo δ successivo all'istante in cui S' e Σ vengono a coincidere, in modo tale che si possono trascurare i termini in δ^2 . Chiediamoci allora quale sia il ritmo degli orologi in S' in rapporto a quelli di Σ se l'accelerazione γ risulta essere così piccola in modo da trascurare gli effetti in γ^2 . Si vede allora che l'influenza degli spostamenti relativi, della velocità relativa e dell'accelerazione sul ritmo degli oro-

logi nei due sistemi è del secondo ordine o di ordine superiore. In conclusione – con queste approssimazioni – gli orologi in un sistema inerziale e quelli in un sistema accelerato battono allo stesso ritmo. Einstein dunque ripropone con un esperimento mentale e utilizzando tre sistemi di riferimento la medesima argomentazione presente nel passo riportato: l'intuizione del Principio di Equivalenza.

2. Poniamoci ora la domanda di come si comportino due orologi in punti distinti di Σ . Siccome all'istante $t = 0$ gli orologi di Σ erano sincronizzati con quelli di S , ad un istante successivo i punti di Σ si muovono in modo analogo rispetto a S , quindi gli orologi rimarranno sincroni rispetto a quest'ultimo. Ma allora – per la Relatività ristretta – essi non sono sincroni rispetto a S' e vediamo di valutarne il loro rapporto. Definiamo ora il tempo τ in Σ scegliendo un orologio in Σ , che per comodità poniamo nell'origine, e fissiamo $\tau = t$. Successivamente, tramite il risultato (1) sappiamo che la condizione di simultaneità fra due punti 1 e 2 in Σ è

$$t_1 - \frac{vx_1}{c^2} = t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \quad (3)$$

dove la velocità $v = \gamma t = \gamma \tau$. Ora scegliamo il punto 1 coincidente con l'origine di Σ e il punto 2 di coordinate $(\xi, 0, 0)$ in cui il tempo sia pari a σ . Supponiamo inoltre che il tempo τ della coincidenza fra Σ ed S' sia molto piccolo in modo da trascurare i termini in τ^2 ; con questa approssimazione abbiamo $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 = \xi$ e $t_1 = \tau$, $t_2 = \sigma$. La formula precedente diviene

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2} \right) \quad (4)$$

Questo risultato è di notevole importanza se accompagnato dalla sostituzione del sistema accelerato Σ con uno inerziale immerso in un campo gravitazionale omogeneo orientato nella direzione ξ – come ci richiede il Principio di Equivalenza. Sostituendo nella (4) si ha

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (5)$$

A commento della (5) Einstein giunge ad un risultato notevole: egli afferma che “*Esistono orologi che sono disponibili in posti con diverso potenziale gravitazionale e i cui ritmi possono essere controllati con grande precisione; si tratta dei generatori di luce spettrali. Da quanto detto in precedenza segue che la luce proveniente dalla superficie del sole (...) ha una lunghezza d'onda maggiore della luce generata sulla terra dal medesimo materiale*”. In sostanza Einstein deduce tramite la (5) lo spostamento gravitazionale verso il rosso delle linee spettrali.

3. Utilizzando sempre l'accorgimento dei tre sistemi di riferimento Einstein passa ad analizzare il comportamento delle equazioni di Maxwell. Come risultato finale si accorge che esse mantengono la stessa forma in S e Σ se la velocità della luce nel secondo è rapportata a quella del primo dalla relazione

$$c' = c \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2} \right) \quad (6)$$

Ricordando ancora una volta il Principio di Equivalenza, possiamo sostituire la (6) con

$$c' = c \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (7)$$

che ha delle notevoli conseguenze fisiche come ci dice lo stesso Einstein: “*Da ciò consegue che i raggi di luce che non si propagano nella direzione ξ vengono deflessi dal campo gravitazionale*”

4. Infine Einstein considera la legge di conservazione dell’energia in Σ e raggiunge un risultato ‘notevolissimo’: “*Una energia E [definita come tale nel caso di assenza del campo gravitazionale] (...) contribuisce all’energia totale con un termine additivo dipendente dalla posizione*

$$\frac{E}{c^2}\gamma\xi = \frac{E}{c^2}\Phi \quad (8)$$

In un campo gravitazionale si deve associare ad ogni energia E un’energia addizionale, dipendente dalla posizione, uguale all’energia di posizione di una massa ‘ponderabile’ di grandezza $\frac{E}{c^2}$. La legge [$E = mc^2$] (...) vale di conseguenza non solo per la massa inerziale, ma anche per la massa gravitazionale.”