The model of thin shell in General Relativity

E. Gasco[1]

[1]Zirak Software Department - www.zirak.it

SISFA Conference, 2022

Outline

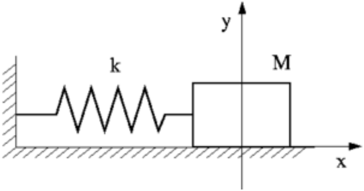
Outline

Il Modello Teorico di Giere I

- Si consideri l'equazione differenziale di secondo grado: $ad^2u/dt^2 + bu = 0$
- Esistono almeno due modelli che istanziano questa struttura matematica:
  - Oscillatore armonico lineare $\rightarrow$ $md^2x/dt^2 + kx = 0$
  - Circuito Elettrico $\rightarrow$ $Ld^2q/dt^2 + 1/cq = 0$
- Il modello è costituito da:
  - **Struttura Matematica**: rappresenta la struttura matematica che si ha intenzione di utilizzare
  - **Principi Teorici**: sono ad esempio le leggi di Newton, Principio di Relatività
  - **Condizioni Speciali**: la legge di gravitazione universale
  - **Interpretazione**: sono ad esempio le ipotesi per legare il modello teorico al mondo fisico.

Outline

Il modello teorico di oscillatore armonico lineare I

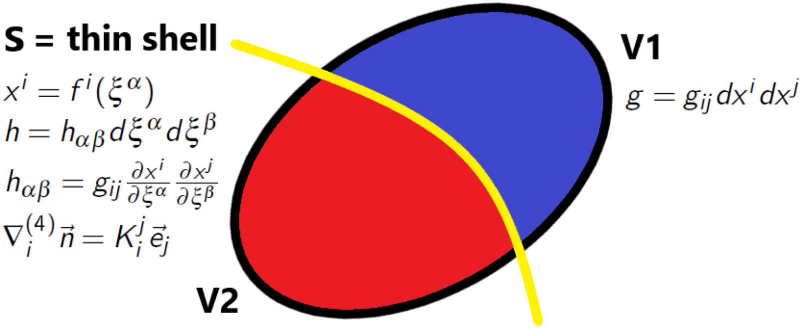
Figure: 

- **Struttura Matematica**: $\rightarrow md^2x/dt^2 + kx = 0$
- **Principi Teorici**: equazioni della dinamica di Newton
- **Condizioni Speciali**: legge di Hook $\rightarrow F = -kx$
- **Interpretazione**: la variabile x corrisponde alla posizione della massa oscillante, k è la costante elastica della molla

Outline

Struttura Matematica I

Figure:



Struttura Matematica II

- Ogni varietà è caratterizzata da una metrica: $V_i \to g = g_{ij} dx^i dx^j$. Su V_i sono definite delle carte (A, x^i) che ricoprono la varietà.
- La superficie S è individuata da: $x^i = f^i(\xi^\alpha)$ dove ξ^αsono le coordinate sulla superficie.
- La metrica di S (prima forma fondamentale) è determinata da $h = h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ ed è legata alla metrica della varietà dalla relazione $h_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta}$
- La seconda forma fondamentale di S è la Curvatura Esterna: $\nabla_i^{(4)} \vec{n} = K_i^j \vec{e}_j$e descrive come la superficie è immersa nella varietà V.

Outline

Principi Teorici e Condizioni speciali I

- I **Principi Teorici** sono i seguenti:
  - Principio di Relatività Generale: Le leggi fisiche sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento.
  - Costanza della velocità della luce: in qualsiasi sistema di riferimento la velocità della luce ha un valore definito e misurabile sperimentalmente.
  - Principio di Equivalenza: la massa inerziale e la massa gravitazionale sono equivalenti.
- La **condizione speciale** che utilizza la geometria differenziale per creare modelli fisici è rappresentata dalle quazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Principi Teorici e Condizioni speciali II

- **Interpretazione**: "*Se consideriamo un insieme di masse in movimento, e la varietà quadridimensionale che ad esse corrisponde ..., a ciascuna delle masse corrisponde un tubo di universo limitato da un certo confine tridimensionale. Tra questi tubi di universo si estende la rappresentazione di regioni vuote di materia. Ad un sistema comprendente n masse, ad esempio al sistema solare, corrisponde uno schema con n tubi dell'universo.*" [G. Darmois 1927].
- **Interpretazione**: se il Tensore Energia Momento subisce una discontinuità nel passaggio attraverso una superficie (modello Schwartzschild Interno/esterno) che divide lo spazio-tempo in due varietà adiacenti, anche la curvatura subisce una discontinuità che corrisponde ad una discontinuità delle derivate seconde della metrica.

Outline

Le condizioni di giunzione di Synge I

Synge e **O'Brien** (1952 - *Jump Conditions at Discontimuities in General Relativity*) approcciano il problema della giunzione partendo da un esempio di Fisica classica.

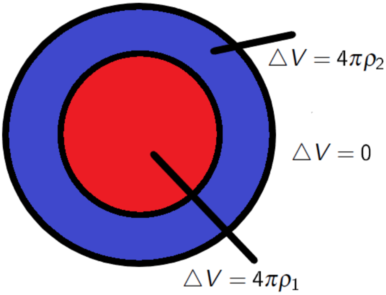


Figure:

Le condizioni di giunzione di Synge II

- "*A problem in mathematical physics is not completely stated by writing down partial differential equations. Boundery conditions must be specified, and also jump conditions across surfaces on which some of the unknown quantities or their derivatives may be discontinuous*".
- Bisogna considerare le seguenti condizioni per determinare correttamente V:
  - V tende a zero all'infinito
  - V e la sua derivata lungo la normale ($\frac{\partial V}{dn}$) devono essere continue sulle superfici S1 e S2
- In Relatività Generale ci troviamo in una situazione simile con le equazioni di Einstein ed il tensore energia momento. Synge si chiede "*We think of a 3-space S in space time across which some of the component of $T_{\mu\nu}$ are discontinuous (e.g. the history of the surface of the earth)*".

Le condizioni di giunzione di Synge III

- Synge si chiede: "*What are the jump conditions on $g_{\mu\nu}$ and their partial derivatives, and also the jump conditions on $T_{\mu\nu}$ if some of the components of $T_{\mu\nu}$ change abruptly on crossing S.*"
- Introducendo "*a boundary layer across which all quantities change continuosly, and proceed to a limit in whch the tickness of the layer tend to zero*" le due varietà si incollano correttamente su S se valgono le condizioni:
  - g_{ik}, $\frac{\partial g_{i\mu\nu}}{\partial x^4}$, T^4_k sono continui attraverso S
- Synge utilizza un particolare sistema di coordinate rispetto a cui l'equazione della superficie è $x_4 = 0$. Tale sistema di coordinate è quello gaussiano

Outline

Il problema delle coordinate I

- **Lankzos** (1924 - *Flachenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie*): a partire da un problema cosmologico (soluzione di De Sitter) mostra come un cambio di coordinate possa determinare la presenza di 'mass horizon' (termine cognato da Weyl ad indicare un'apparente strato di materia nella soluzione di De Sitter) che non hanno significato fisico. Per superare la difficoltà studia una prima forma di modello di thin shell da un punto di vista prettamente fisico, individuando il tensore energia-impulso della ipersuperficie e la Curvatura Esterna, che però non riconosce come tensore sulla sotto-varietà.

Il problema delle coordinate II

- **Darmois** (1927 - *Les equations de la gravitations einsteinienne*): a partire dalla forma delle equazioni di Einstein che ammettono onde gravitazionali (proposta da Einstein con un metodo perturbativo) Darmois ottiene tutta una serie di risultati fisici basandosi solamente su proprietà intrinseche alle varietà differenziali. Studiando il problema della continuità della soluzione di Schwartzschild interna/esterna utilizza la Curvatura esterna per stabilire la continuità della metrica. Individua le condizioni di giunzione: "*Then V1 and V2 are said to match across S if the first and second fundamental forms of S are identical*".

Il problema delle coordinate III

- **Lichnerowicz** (1955 - *Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme*): Alunno di Darmois e Cartan introduce il concetto di "Coordinate ammissibili" e determina le condizioni di giunzione che vanno sotto il suo nome: "*V1 and V2 are said to match across S if for every point P of S there exists a system of coordinates such that their domain contains P, and such that the metric components and their first derivatives are continuous across S. Such coordinates are called admissible*".
- **Bonnor** e **Vickers** (1981 - *Junction Conditions in General Relativity*) hanno dimostrato l'equivalkenza fra le condizioni di Darmois e quelle di Lichnerowicz, mentre quelle di Synge risultano più restrittive in quanto coinvolgono anche il tensore Energia Impulso.

Outline

Il modello di Thin Shell di Israel I

- Nel 1966 (*Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity*) Israel propone un modello di Thin Shell che si riallaccia al lavoro di Lanczos e Synge, ma in sostanza utilizza i risultati di Darmois - che probabilmente non erano noti in ambito anglosassone.
- Suddivide le superfici di discontinuità in due categorie e le distingue in base alla continuità della curvatura esterna:
  - **Boundary Surface**: sono quelle superfici attraverso cui la metrica e le sue derivate prime sono continue. Fisicamente corrispondono alle shock-wave in idrodinamica. Sono individuate dalla condizione $\left[K^i_j\right] = 0$

Il modello di Thin Shell di Israel II

- **Surface Layer**: sono quelle superfici su cui solo la metrica è continua e non più le sue derivate. Questa condizione implica che sulla superficie è distribuita la materia che causa il brusco cambio di continuità. Sono individuate dalla condizione $\left[K^i_j\right] \neq 0$
- Determina il tensore energia momento sulla superficie in termini puramente geometrici e mostra con un processo al limite il suo significato fisico come un tensore energia momento. Il **tensore di Lanczos** - il tensore energia impulso sulla superficie S - è definito in relazione alla curvatura esterna come

$$[K_{ij}] = -8\pi \left(S_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} S \right)$$

Il modello di Thin Shell di Israel III

considerando la superficie S come il limite di uno strato infinitesimo di spessore ε ed integrando le equazioni di Einstein attraverso lo strato si ottiene al fine l'espressione

$$S_{ij} = \int_0^{\varepsilon} T_{ij} dx^0$$

- **Analogia Classica**. Si condideri un surface layer S con coordinate ξ^i. Introducendo coordinate gaussiane x^αtali per cui $x^i = \xi^i$ e $x^1 = \pm$ distanza geodetica normale a S (in queste coordinate S ha equazione $x^1 = 0$). In tali coordinate il tensore di Lanczos si riduce a

$$[\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\mu] = -2\chi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} S \right) n_\mu$$

Il modello di Thin Shell di Israel IV

che lega la discontinuità della metrica al tensore energia impulso sulla superficie. L'equivalente Newtoniano di tale equazione è la formula di Coulomb

$$\left[grad\,\overrightarrow{V}\right] = 4\pi G\sigma\vec{n}$$

che lega la discontinuità del gradiente del potenziale alla densità di superficie.

Il modello di Thin Shell di Israel V

- **Analogia Classica**. Se si considera un Surface Layer nel vuoto la conservazione del tensore di Lanczos porta alla condizione

$$n^{\alpha}\nabla_{\beta}S^{\beta}_{\alpha}\mid^{+} - n^{\alpha}\nabla_{\beta}S^{\beta}_{\alpha}\mid^{-} = \chi\left(S_{ab}S^{ba} - \frac{1}{2}S^{2}\right)$$

che equivale alla formula

$$\sigma\vec{F}^{-}\bullet\vec{n} = -\sigma\vec{F}^{+}\bullet\vec{n} = 2\pi G\sigma^{2}$$

per la componente normale della forza meccanica dovuta all'attrazione delle due faccie dello strato con densità superficiale σ

Outline

Thin shell di polvere I

- Le equazioni di Gauss Codazzi espresse nei termini del tensore di Einstein assumono la forma:

$$-2\varepsilon \overrightarrow{n} G_{ij} n^i n^j = R + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2$$

$$G_{ij} e^i_{(\alpha)} n^j = K^{\beta}_{\alpha;\beta}$$

- Se si considera un Surface Layer nel vuoto tali equazioni divengono:

$$S^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \qquad \widetilde{K}^{\beta}_{\alpha;\beta} - \widetilde{K}_{\alpha} \qquad \widetilde{K}_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0$$

$$R + \widetilde{K}_{\alpha\beta} \widetilde{K}^{\alpha\beta} - \widetilde{K}^2 = -\frac{1}{4}\chi^2 (S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} S^2)$$

Thin shell di polvere II

- Un Thin Shell si dice formato da polvere se il tensore energia impulso assume la foma:

$$S^{\alpha\beta} = \sigma u^\alpha u^\beta$$

- Le curve $d\xi^\alpha/ds = u^\alpha$ che sono tangenti ad S sono le geodetiche delle particelle.
- La 4-accelerazione delle particelle di polvere è data da:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial s} = -u^\alpha K_{\alpha\beta} u^\beta \vec{n}$$

Riassunto

- Abbiamo introdotto la nozione di modello secondo Giere
- Abbiamo descritto lo sviluppo del modello di Thin Shell in Relatività Generale

- Outlook
  - Approfondire la posizione di Giere
  - Dettagliare meglio la parte matematica di Lanczos, Darmois e Lichnerowicz