Il rapporto fra geometria ed esperienza in Poincaré(*)

Il rapporto fra geometria ed esperienza é un tema tipico della riflessione sia fisica che filosofica, basti pensare da un lato al contributo di Kant nella *Critica della Ragion Pura* dove la geometria di Euclide deriva da una delle forme a priori dell'intelletto, e dall'altro ai tentativi operati da Eulero nel determinare la corretta geometria dello spazio in cui viviamo. A partire dal risultato raggiunto da Eulero e da quelli determinanti di Lobacewskij e Riemann, che introdussero le geometrie non euclidee, si sviluppa la riflessione geometrica ed epistemologica di Poincaré. In particolare la seconda ci interesserá, anche se e da ricordare che lo scienziato francese rappresentó un punto di svolta per la ricerca geometrica come dimostra ad esempio la formulazione dell' 'analisis situ' precorritrice dell'odierna topologia. La nascita delle geometrie ellittiche ed iperboliche pone un problema nuovo alla riflessione filosofica di metá ottocento; quale e infatti la corretta geometria da associare alla nostra esperienza quotidiana. Il dibattito sull'argomento fu aspro e ricco di sfumature e Poincaré partecipó con una posizione originale che assunse il nome di *convenzionalismo*; egli infatti asserí che qualunque geometria, sia euclidea che non, risulta svilupparsi da un insieme di veritá che sono puramente convenzionali. Vediamo di chiarire il punto.

La geometria euclidea si fondava su tre assiomi non dimostrati e su un quarto (il postulato di Euclide) che numerosi geometri dell'800 cercarono di dimostrare a partire dai primi tre; ogni tentativo risultó inutile. Il postulato di Euclide asserisce che *esiste un'unica parallela ad una retta data.* Il lavoro compiuto da Lobacevskij, Riemann ed Eulero fu quello di dimostrare per assurdo il quarto postulato, negandone la veridicitá e costruendo geometrie alternative che in qualche modo si contraddicessero (la via seguita da Lobacevskij). Il risultato peró a cui giunsero fu che le geometrie da essi ipotizzate erano perfettamente valide sotto l'aspetto logico e quindi competitive con quella euclidea.

Per stabilire quindi quale sia il rapporto fra le varie geometrie e l'esperienza é necessario riflettere sul punto di partenza: gli *assiomi.* La risposta che ci viene fornita da Poincaré é abbastanza semplice: gli assiomi rappresentano una generalizzazione, un'astrazione dei dati fornitici dall'esperienza; cosí ad esempio il concetto di linea retta nasce dall'osservazione che i raggi luminosi sembrano percorrere un tratto rettilineo, oppure il concetto di piano ci viene fornito dalle facce degli oggetti tridimensionali della nostra quotidianitá, e cosí via... Il matematico francese sottolinea inoltre che nella geometria degli specialisti sono presenti numerosi assiomi impliciti e sovente inconsapevoli che in una qualche maniera sono mutuati dall'esperienza: se consideriamo ad esempio il caso di due figure geometriche uguali, da un punto di vista matematico diciamo che esse sono tali se sono sovrapponibili, ma il concetto di sovrapponibilitá non é dato negli assiomi della geometria a meno che non ammettiamo la possibilitá di un *moto rigido.* Se dunque le geometrie si fondano su un insieme di assiomi dedotti dall'esperienza – alcuni ben formalizzati e altri impliciti – essi non sono dei giudizi *a priori*, perché in tal caso ci sarebbero immediatamente chiari. Sono dunque assunti empirici?

(*) *La Scienza e l'ipotesi.* H.Poincaré

La risposta é ancora negativa in quanto qualsiasi concetto empirico si fonda su oggetti pratici che non hanno tutte quelle qualitá di precisione e rigore necessarie per costruire una geometria (cosí ad esempio un cerchio *empirico* potrebbe essere una figura disegnata con il gesso). Qual é dunque la natura di questi assiomi? Poincaré al riguardo afferma in modo perentorio: '*[gli assiomi geometrici] sono delle convenzioni* [in corsivo]*; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, é guidata* [in corsivo] *da fatti sperimentali, ma resta libera* [in corsivo] *e non é limitata che dalla necessitá di evitare ogni contraddizione. É cosí che i postulati possono rimanere rigorosamente* [in corsivo] *veri, anche se le leggi sperimentali che hanno determinato la loro adozione non sono che approssimative*'

Va da se che la geometria euclidea é quella che ci viene fornita direttamente dai nostri sensi – quella in un certo modo piú aderente alla nostra quotidianitá – mentre le altre sono ugualmente corrette, non vi infatti alcuna contraddizione nella loro deduzione, ma non discendono dai dati della nostra sensibilitá. Questo non vuole dire che la geometria euclidea sia la migliore, vuole significare solamente che essa quella "piú vicina" ai dati fornitici dall'esperienza mentre le altre sono in un certo senso piú astratte (si consideri ad esempio la loro nascita dal rifiuto di un postulato); esse insomma nascono in ambito strettamente geometrico e non sono una "generalizzazione" dei dati forniti dalla sensibilitá.

Proviamo ora a stabilire quale sia il percorso che ci porta alla geometria euclidea. Poincaré prende in considerazione lo spazio geometrico e lo confronta con gli altri spazi fornitici dai sensi: lo spazio visivo, quello tattile ed infine quello motore.

Lo spazio propriamente geometrico é caratterizzato da alcune proprietá essenziali:

1. é continuo
2. é infinito tre dimensioni
3. é omogeneo, cioé tutti i suoi punti sono equivalenti fra loro
4. é isotropo, cioé tutte le rette che passano per un medesimo punto sono identiche fra loro

Queste cinque caratteristiche non sono contemporaneamente presenti negli spazi in cui puó essere scomposta la nostra sensibilitá, quindi lo spazio geometrico rappresenta un qualcosa d'altro. Consideriamo inizialmente un'impressione puramente visiva; un'analisi superficiale ci mostra che essa é continua, bidimensionale e racchiusa in una cornice limitata. Inoltre lo spazio visivo non é *omogeneo* in quanto i punti al centro della retina hanno un valore decisamente superiore di quello ai bordi. Lo spazio visivo "normale" é bidimensionale, come abbiamo suggerito, ma noi siamo in grado ugualmente di cogliere la terza dimensione; questo avviene in quanto affianchiamo alla funzione degli occhi una serie di azioni muscolari che permettono un loro accomodamento e una loro convergenza sull'oggetto osservato. La terza dimensione ha dunque un comportamento totalmente diverso da quella delle prime due e dunque lo spazio visivo completo non é neppure *isotropo*.

Ugualmente complessi sono lo spazio tattile e quello motore. In special modo quest'ultimo é interessante in quanto é uno spazio le cui dimensioni corrispondono all'insieme delle nostre sensazioni muscolari. Se lo spazio motore contribuisce in qualche modo alla nostra nozione di spazio dobbiamo introdurre anche il concetto di direzione; questa idea non ci viene imposta a priori – come sembrerebbe da un'analisi sommaria – ma é il risultato di un'abitudine: un insieme di sensazioni motorie corrisponde nella quotidianitá sempre ad una stessa direzione, quindi a quella direzione sono associate certe sensazioni, se si cambia direzione vi saranno sensazioni muscolari differenti e cosí via. Nulla comunque ci vieta di pensare che il nostro concetto di direzione sarebbe diverso se vivessimo in un mondo piú complesso di questo.

Abbiamo dunque che lo spazio rappresentativo della nostra sensibilitá é tripartito e non ha nulla a che fare con quello propriamente geometrico. Qual é dunque il loro rapporto? Sovente diciamo che "proiettiamo" gli oggetti esterni nello spazio geometrico e li "localizziamo" in qualche punto. Ma come avviene questa proiezione e questa localizzazione? In realtá noi non "proiettiamo" alcunché nello spazio geometrico, ma semplicemente "ragioniamo" su degli oggetti che fanno giá parte dello spazio geometrico; vi é sicuramente una corrispondenza fra quello che osserviamo e quello che utilizziamo in geometria, ma é un rapporto analogo a quello che intercorre fra gli oggetti tridimensionali esterni e la loro rappresentazione su una tela di un pittore. Poincaré dice al riguardo che "*lo spazio rappresentativo non é che un'immagine dello spazio geometrico, immagine deformata da una sorta di prospettiva, e noi non possiamo rappresentarci gli oggetti se non piegandoli alle leggi di tale prospettiva*". E che dire della localizzazione? I punti dello spazio geometrico cosa rappresentano? La posizione di un oggetto "geometrico" in un punto rappresenta unicamente l'insieme di movimenti che dobbiamo compiere per raggiungerlo.

Gli oggetti esterni ci sono forniti dalla sensibilitá con alcune caratteristiche che si modificano nel tempo; distinguiamo i cambiamenti che si osservano in *cambiamenti di stato* e *cambiamenti di posizione*. Come facciamo a separare le due casistiche? Sono forse la stessa cosa? Evidentemente no e l'unico modo per discernere fra i due cambiamenti é il seguente: se si é verificato solamente *un cambiamento di posizione* possiamo ricostruire l'insieme di impressioni iniziale compiendo dei movimenti che ci riportino nella medesima posizione relativa di quando il cambiamento non era ancora avvenuto. Se fossimo degli esseri immobili non riusciremmo in alcun modo ad individuare dei cambiamenti di posizione e tutto quello che osserveremmo sarebbe inevitabilmente delle variazioni di stato. É dunque la possibilitá di muoversi, quindi lo spazio motorio, che ci consente in primo luogo di avere una nozione di spazio. Ma non é tutto! Affinché riusciamo a riconoscere, una volta compiuto lo spostamento, la medesima configurazione iniziale, é necessario che il corpo che si é dapprima spostato e in eguale misura la configurazione della nostra muscolatura dopo il secondo movimento mantengano la medesima struttura fra le parti componenti.

Se il mondo della nostra quotidianitá non fosse composto da corpi *solidi* la nostra geometria sarebbe sicuramente piú complessa. Possiamo dunque concludere che la nozione di spazio geometrico, fondamento di ogni geometria ed in particolare di quella euclidea, nasce dall'osservazione che nel nostro quotidiano possiamo raggiungere con atti motori dei corpi pressoché rigidi. La geometria euclidea studia le leggi dei corpi rigidi e di come essi si muovono. Nulla vieta di pensare che se avessimo un'altra quotidianitá otterremo una geometria differente. É il tentativo che compie Poincaré immaginando un mondo rinchiuso in una grande sfera e sottoposto alle seguenti leggi:

1. la temperatura non é uniforme: essa é massima al centro e diminuisce fino allo zero assoluto quando si raggiunge la sfera. Si pu'o anche specificare la legge secondo cui varia la temperatura: indicando con R il raggio della sfera e con r la distanza dal centro di un qualsiasi punto interno, la temperatura nel suddetto punto sará proporzionale a $R^2 - r^2$.

2. tutti i corpi presentano lo stesso coefficiente di dilatazione in modo tale che la lunghezza di un qualsiasi regolo sia proporzionale alla sua temperatura assoluta

3. un corpo spostato da un punto ad un altro raggiunge immediatamente la temperatura relativa a quel punto

4. la luce attraversa ambienti diversamente rifrangenti: l'indice di rifrazione supponiamo

sia proporzionale all'inverso di $R^2 - r^2$. Con questa legge i raggi luminosi non sono rettilinei ma circolari.

Queste ipotesi sono tutte plausibili; vediamo quale geometria si otterrebbe se vivessimo in un mondo siffatto. Innanzi tutto un corpo allontanandosi dal centro si raffredderá fino a raggiungere lo zero assoluto e diminuirá di dimensioni nell'avvicinarsi al bordo della sfera; anzi si puó dire che proprio per questa proprietá il mondo fittizio non sembrerá limitato come appare a noi, ma risulterá infinito. Se nel nostro caso la geometria é lo studio dei movimenti rigidi, gli scienziati di quel mondo creeranno una geometria che studia come si muovono i corpi deformati dalle differenze di temperatura.

Rimane ora da verificare che ad uno spostamento di un corpo possa corrispondere un adeguato movimento correlativo (si ricordi che questo é un punto importante nella costruzione di una geometria). Supponiamo dunque che un corpo si sposti da una posizione ad un'altra all'interno della sfera e che subisca le deformazioni di cui si detto per le variazioni di temperatura: chiamiamo questo spostamento *spostamento non euclideo.* Se un individuo si trova nelle vicinanze dell'oggetto, le sue impressioni verranno modificate dallo spostamento dell'oggetto, ma egli potrá ristabilirle se anch'egli compie uno spostamento non euclideo. Bisogna inoltre ammettere che le parti dell'oggetto e quelle del corpo dell'individuo si modifichino secondo la solita legge delle temperature e analogamente, tenendo conto dell'ipotesi fatta sulla luce, che le impressioni visive rimangano le medesime in uno spostamento non euclideo.

La geometria sviluppata dagli scienziati del mondo fittizio é anch'essa mutuata dall'esperienza ma, a differenza della nostra, risulta essere non euclidea.

Ma allora come potremmo rispondere alla domanda "quale fra le varie geometrie é quella piú attinente all'esperienza?" Penso che la risposta di Poincaré si possa riassumere nell'inefficacia della domanda; stabilire infatti quale sia la geometria é un fatto empirico che coinvolge non solo la geometria ma anche altre discipline. Consideriamo ad esempio il caso dell'esperimento di Eulero: egli cercó di misurare la somma degli angoli interni di un triangolo molto grande posizionato sulla superficie terrestre. A seconda dei risultati egli poteva dedurre quale geometria effettiva si presentava nel nostro mondo. Ottenne un risultato vicino a quello euclideo, ma notó che il triangolo considerato era troppo piccolo per risolvere la questione. Supponiamo comunque di ottenere un responso sperimentale che suggerisca una geometria non euclidea (ad es. iperbolica). Come proseguiamo? Possiamo seguire due strade: accettare una tale geometria, oppure mantenere quella euclidea e modificare le leggi della fisica, ammettendo ad esempio che i raggi luminosi si muovano in modo curvilineo; i risultati sarebbero gli stessi. La scelta operata da Poincaré quindi si basa sulla semplicitá della teoria complessiva ed é curioso osservare che egli preferisca modificare le leggi della fisica che cambiare la geometria euclidea.