Uso della tecnica di Best Maching in IR.

Nella presente nota si vuole utilizzare la tecnica del *Best Matching* - introdotta in Fisica dal lavoro di Barbour e Bertotti [1] ed ora utlizzata nella *Shape Dynamic Theory* [2] - per confrontare due simplessi differenti in uno spazio n-dimensionale. Tale problema è già noto nell'Information Tecnology ad esempio nella manipolazoione delle immagini quando si vuole ottenere la matrice di trasformazione che agisce su due immagini uguali determinate in tempi differenti.

Un simplesso è un insieme di n-punti in uno spazio n-dimensionale con il minor numero di vertici [5]: in 3D un esempio di simplesso è costituito da un triangolo. Per introdurre il problema nell'ambito dell'Information Retrieval consideriamo due corpus di testi differenti e poniamoci il problema di determinare come confrontare tre concetti in un corpus con i medesimi tre concetti nell'altro insieme di documenti. Da un punto di vista geometrico noi abbiamo un triangolo in uno spazio n-dimensionale (dove n è la dimensione del primo corpus) da confrontare con un triangolo in uno spazio m-dimensionale (dove m è la dimensione del secondo corpus). Per costruire lo spazio n-dimensionale utilizziamo gli spazi semantici ed in special modo gli HAL-space. Per confrontare i due triangoli su dati differenti dobbiamo generare una spazio di HAL k-dimensionale in modo che $k \geq m, n$, così facendo avremo che i due triangoli T_1 e T_2 saranno composti da:

$$T_1 = \left\{ P_1 = \begin{bmatrix} x_1^{P_1} \\ x_2^{P_1} \\ \vdots \\ x_k^{P_1} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} x_1^{P_2} \\ x_2^{P_2} \\ \vdots \\ x_k^{P_2} \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} x_1^{P_3} \\ x_2^{P_3} \\ \vdots \\ x_k^{P_3} \end{bmatrix} \right\}$$

$$T_2 = \left\{ Q_1 = \begin{bmatrix} x_1^{Q_1} \\ x_2^{Q_1} \\ \vdots \\ x_k^{Q_1} \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} x_1^{Q_2} \\ x_2^{Q_2} \\ \vdots \\ x_k^{Q_2} \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} x_1^{Q_3} \\ x_2^{Q_3} \\ \vdots \\ x_k^{Q_3} \end{bmatrix} \right\}$$

La forma più semplice per determinare la *similarità* fra la combinazione dei tre concetti nei due corpus è determinare il baricentro dei due triangoli (che ne rappresenta una sorta di media) e poi valutarne la distanza. I due baricentri sono calcolati nel modo seguente:

$$B_{T_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(x_1^{P_1} + x_1^{P_2} + x_1^{P_3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(x_2^{P_1} + x_2^{P_2} + x_2^{P_3}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{3}\left(x_k^{P_1} + x_k^{P_2} + x_k^{P_3}\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P_i = \overrightarrow{B_1} \tag{1}$$

$$B_{T_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(x_1^{Q_1} + x_1^{Q_2} + x_1^{Q_3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(x_2^{Q_1} + x_2^{Q_2} + x_2^{Q_3}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{3}\left(x_k^{Q_1} + x_k^{Q_2} + x_k^{Q_3}\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} Q_i = \overrightarrow{B_2} \tag{2}$$

e come detto in presedenza la similarità dei concetti è determinata dall'angolo che intercorre fra i due vettori:

$$d\left(B_{T_1}, B_{T_2}\right) = \cos(\phi) = \frac{B_{T_1} \cdot B_{T_2}}{\|B_{T_1}\|\|B_{T_2}\|}$$

Nella presente nota vogliamo superare questo algoritmo utilizzando solo le proprietà intrinseche del triangolo, quindi le distanze relative fra i punti che lo costituiscono e gli angoli sottesi dai segmenti. Per raggiungere tale obiettivo ci viene in aiuto la tecnica del *best matching* che in parole semplici ci permette di determinare la trasformazione migliore che mappa un triangolo (un simplesso in generale) in un altro preservando le distanze relative. Quest'ultimo punto è importante da sottolineare, perchè le trasformazioni in oggetto coinvolgono solo traslazioni e rotazioni, mentre invece le dilatazioni non sono prese in esame.

Per comodità di analisi i due triangoli si possono considerare come due punti in uno spazio euclideo di dimensione 3k, come si vede dalla seguente formula:

$$T_1 \rightarrow \overrightarrow{r_1} = (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} x_1^{P_1} \\ \vdots \\ x_k^{P_1} \\ x_1^{P_2} \\ \vdots \\ x_k^{P_2} \\ x_1^{P_3} \\ \vdots \\ x_k^{P_3} \end{pmatrix}$$

$$T_2 \rightarrow \overrightarrow{r_2} = (Q_1, Q_2, Q_3) = \begin{pmatrix} x_1^{Q_1} \\ \vdots \\ x_k^{Q_1} \\ x_1^{Q_2} \\ \vdots \\ x_k^{Q_2} \\ x_1^{Q_3} \\ \vdots \\ x_k^{Q_3} \end{pmatrix}$$

da cui si determina la distanza fra i due punti nel modo seguente:

$$d\left(\overrightarrow{r_1},\, \overrightarrow{r_2}\right) = \left[\sum_{i=1}^{3k} \left(r_1^i - r_2^i\right)^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

che fra l'altro è un altro modo di determinare la similarità fra i due triangoli. E' da notare che questa espressione dipende sia sui cambi intrinseci di configurazione fra i due triangoli, sia sulla loro posizione reciproca. Possiamo eliminare la seconda dipendenza considerando tutti i possibili cambiamenti per determinare la trasformazione che rende minima la (3). In altre parole dobbiamo determinare $\overrightarrow{r_{BM}}$ in modo tale che:

$$d\left(\overrightarrow{r_1},\, \overrightarrow{r_{BM}}\right) = inf_r\left(d(\overrightarrow{r_1},\, \overrightarrow{r}\right)\ ,\ \|r_{BM}^i - r_{BM}^j\| = r_2 \tag{4}$$

dove si è scelto di spostare il secondo triangolo sul primo. In altre parole si cerca di minimizzare la trasformazione fra i due triangoli in modo tale che le proprietà intrinseche del secondo triangolo (quindi gli angoli e le distanze reciproche fra i vertici) rimangano inalterate. Tale trasformazioni - come abbiamo già osservato - sono le traslazioni e le rotazioni, che possono essere espresse dalla formula seguente:

$$T:\ \overrightarrow{r} \rightarrow \Omega\overrightarrow{r} + \overrightarrow{\theta} \tag{5}$$

dove Ω è una matrice di rotazione e θ una traslazione. Tale equazione applicata alla (4) porta all'equazione:

$$d_{BM}\left(\overrightarrow{r_1},\, \overrightarrow{r_2}\right) = inf_T d\left(\overrightarrow{r_1},\, T\left(\overrightarrow{r_2}\right)\right) = inf_{\Omega,\theta}\left(\sum_{a=1}^{3} \|\overrightarrow{r_a^1} - \Omega\overrightarrow{r_a^2} - \overrightarrow{\theta}\|^2\right)^{1/2} \tag{6}$$

dove per intendere la sommatoria si deve tenere conto che il vettore $\overrightarrow{r}$ è un vettore in uno spazio 3k, quindi è 'composto' dai tre vettori che individuano i vertici del triangolo (per questo è necessaria la sommatoria su $a = 1 \ldots 3$).

L'equazione (6) ha le caratteristiche di una distanza e prende il nome di *best-matched distance* [1]. Determinare la trasformazione che rende minima la (6) non è banale, soprattutto per quanto riguarda la rotazione. In [2] si dismostra facilmente che per quanto riguarda la traslazione $\overrightarrow{\theta}$ si ottiene una trasformazione che porta il secondo triangolo nel baricentro del primo; se poi si applica una rotazione il calcolo diventa complesso ed in [2] ci si limita al caso particolare in cui i due triangoli (fra l'altro in un semplice spazio 3-dimensionale) sono complanari.

Siccome vogliamo determinare il caso più generico, ci può venire in aiuto la geometria computazionale che permette di determinare la trasformazione minima che 'avvicina il più possibile' (senza dilatazioni) il secondo triangolo sul primo. L'algoritmo che individua tale matrice prende il nome di *Kabsch algorithm* [3] ed è un metodo per calcolare la matrice di rotazione ottimale che minimizza la '*root-mean-square deviation*' [4].

In pratica rifacendoci all'equazione (5) dobbiamo risolvere:

$$\overrightarrow{r_2} = \Omega \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{\theta} \tag{7}$$

dove in questo caso vogliamo ottenere il secondo triangolo a partire dal primo. Come primo step bisogna determinare la '*covariance matrix*', che mi rappresenta la matrice di punti che voglio trasformare l'uno nell'altro: per ottenere questa matrice dobbiamo trasferire i due triangoli in modo che il baricentro coincida con l'origine del sistema di riferimento e questo porta alla matice:

$$H = \sum_{a=1}^{3} \left(\overrightarrow{r_a^1} - \overrightarrow{B_1} \right) \left(\overrightarrow{r_a^2} - \overrightarrow{B_2} \right)^T \tag{8}$$

dove si osservi che l'oggetto H è una matrice in quanto si moltiplica un vettore (3x1) con un vettore (1x3) essendoci nel secondo componente a destra dell'uguale l'operatore '*trasposto*'; che il vettore $\overrightarrow{r_1}$, così come il vettore $\overrightarrow{r_2}$, è stato scomposto nei tre vettori che compongono il triangolo (e questo spiega la sommatoria), ed infine che i vettori $\overrightarrow{B_1}$ e $\overrightarrow{B_2}$ sono i vettori che determinano il baricentro come indicato dalle equazioni (1) e (2).

Costruita dunque la '*covariance matrix*' possiamo applicare il classico metodo della '*Singular Value Decomposition*' per determinare la migliore approssimazione:

$$H = U \Sigma V^T \tag{9}$$

dove le matrici U e V^T sono due rotazioni e la matrice Σ è una dilatazione. Siccome la trasformazione SVD cerca di avvicinarsi il più possibile alla matrice di partenza (ed infatti considera anche delle dilatazioni) a noi interessa solo la scomposizione che considera le rotazioni: in questo modo la rotazione Ω sarà determinata da:

$$\Omega = U V^T \tag{10}$$

[1] Vedere [2] per la dimostrazione.

Con l'equazione (10) abbiamo alfine ottenuto la rotazione ottimale che trasforma il triangolo $\overrightarrow{r_1}$ nel triangolo $\overrightarrow{r_2}$.

Veniamo ora a considerare il caso dell'IR quando si hanno tre triangoli t_1, t_2, t_3 e prendiamo il primo come campione: il problema consiste nel determinare quali dei due triangoli t_2 e t_3 è più simile al triangolo t_1. Per inquadrare correttamente il problema ricordiamo che un triangolo rappresenta l'insieme di 3 concetti, quindi nel nostro caso ci stiamo chiedendo quale fra la 3-pla di concetti t_2 e la 3-pla di concetti t_3 è più simile alla 3-pla di concetti t_1. Calcoliamo per ogni triangolo la rotazione + traslazione necessaria per rendere minima la distanza espressa nell'equazione (6) che porta a determinare per i due triangoli:

$$d_{BM}\left(t_2,\, t_1\right) = \Omega_{t_2 t_1} \tag{11}$$

$$d_{BM}\left(t_3,\, t_1\right) = \Omega_{t_3 t_1} \tag{12}$$

dove le matrici Ω sono calcolate con il metodo espresso nell'equazione (10). Abbiamo ora le due matrici di rotazione che minimizzano la trasformazione fra i due triangoli ed il triangolo campione (t_1), dobbiamo infine determinare quale fra le due matrici è la minore: in questo modo possiamo affermare che i concetti associati al triangolo t_{min}[2]sono quelli più simili ai concetti associati al triangolo campione. Per determinare quale sia la matrice Ω minore si può utilizzare la '*Norma di Frobenius*' che è definita come:

$$\|\Omega\| = tr\left(\Omega\Omega^T\right) \tag{13}$$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per confrontare tre concetti appartenenti ad un corpus di documenti con gruppi di 3 concetti (magari gli stessi) ricavati da altri corpus di documenti.

Riferimenti bibliografici

[1] Bertorri B. Barbour J. Mach's principle and the structure of dynamical theories. In *Proc. R. Soc. A*. 1982.

[2] Mercati. A shape dynamics tutorial. arXiv:1409.0105 [gr-qc].

[3] Wikipedia. Kabsch algorithm. https://en.wikipedia.org/wiki/Kabsch_algorithm.

[4] Wikipedia. Root mean square deviation. https://en.wikipedia.org/wiki/Root-mean-square_deviation.

[5] Wikipedia. Simplex. https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex.

[2]Che sono o t_2 o t_3