

La relatività della localizzazione degli eventi in gravità quantistica

In relatività il concetto di localizzazione di un evento è un valore assoluto a differenza di quanto capita per la simultaneità. Due eventi che si verificano in un medesimo luogo per un osservatore si verificano nel medesimo luogo anche per un osservatore assai distante dal primo. Ma questa assunzione è corretta? Vedremo qui di seguito - riproponendo le argomentazioni esposte nell'articolo "*Relative locality: a deepening of the relativity principle*"[2] - che se ci spostiamo nell'ambito della gravità quantistica la localizzazione assume un aspetto relativo (la sua assolutezza diviene dunque un aspetto emergente). Vediamo allora quali possono essere alcuni semplici ragionamenti che facilitano l'allargamento del principio di relatività anche alla localizzazione.

Seguendo la procedura operativa proposta da Einstein la posizione di un evento viene ottenuta analizzando i segnali luminosi che intercorrono fra l'evento e l'osservatore. In linea di massima questo è corretto, ma nella procedura non si tiene conto dell'energia dei fotoni che si utilizzano. Avremmo lo stesso risultato - cioè stabilire che due eventi accadono nello stesso luogo per due osservatori diversi - se i due osservatori utilizzassero fotoni con energia differente? Vedremo che la risposta non è più così scontata se si considerano aspetti di gravità quantistica. Ci poniamo allora in uno stato di gravità quantistica - detto "*Relative locality regime*" - in cui sia la gravità che la meccanica quantistica sono annullate, ma in cui sono presenti ancora effetti legati alla massa di Plank. Questo regime è individuato dalle condizioni:

$$\begin{aligned}\hbar &\rightarrow 0 \\ G_N &\rightarrow 0 \\ \sqrt{\frac{\hbar}{G_N}} &= M_P\end{aligned}$$

E' stato mostrato in [1] che la condizione di assolutezza sulla localizzazione (Relatività Generale) coincide con il verificare che lo spazio delle fasi associato ad uno spazio-tempo abbia una metrica piatta; risulta quindi possibile che una sua relativizzazione possa portare ad una metrica non piatta sullo spazio delle fasi. Quest'ultima ipotesi fu proposta per la prima volta da Max Born nel 1938: egli sosteneva che la validità della Meccanica Quantistica corrispondeva in fisica all'equivalenza fra lo spazio delle posizioni degli oggetti e lo spazio delle fasi. La presenza della gravità rompe questa simmetria in quanto a partire da Einstein lo spazio-tempo diviene curvo mentre lo spazio delle fasi rimane a geometria piana. La proposta di trasformare in geometria curva la geometria dello spazio delle fasi ripristina la simmetria indicata da Born.

E' facile mostrare che una geometria curva nello spazio delle fasi ha un profondo impatto sul concetto di localizzazione. A tale fine osserviamo il ruolo decisivo che la legge di conservazione del momento in relatività ristretta ha

nell'assicurare l'assolutezza del concetto di localizzazione. Consideriamo un insieme di n particelle che coincidano con l'evento e individuate dalle coordinate x_i^μ per un osservatore O : la legge di conservazione del momento totale in relatività ristretta corrisponde a:

$$P_\nu^{tot} = \sum_j p_\nu^j$$

e consente di determinare il legame esistente fra l'osservatore O e l'osservatore O' che dista da O di un vettore b^μ , secondo la legge:

$$\delta x_i^\mu = \{x_i^\mu, b^\mu P_\nu^{tot}\} = \left\{x_i^\mu, b^\nu \sum_j p_\nu^j\right\} = b^\mu$$

La situazione però sarebbe differente se la geometria non fosse piatta in quanto interverrebbe ora la connessione affine Γ sulla varietà e la precedente relazione sul momento totale delle particelle si trasformerebbe in:

$$P_\mu^{tot} = \sum_j p_\mu^j + \frac{1}{M_P} \sum_{j < k} \Gamma_\mu^{\nu\rho} p_\nu^j p_\rho^k$$

e la relazione fra i due osservatori diverrebbe:

$$\delta x_i^\mu = \{x_i^\mu, b^\mu P^{tot}\} = b^\mu + \frac{1}{M_P} b^\nu \sum_{j > i} \Gamma_\nu^{\mu\rho} p_\rho^j$$

da cui si osserva che nel passaggio da un osservatore ad un altro la linea di universo di una particella si è spostata di una quantità che dipende dall'impulso da essa posseduto e dall'interazione con le altre particelle. In sostanza quello che si ricava da questo semplice esempio è che per osservatori vicini è ancora valido il concetto assoluto di localizzazione degli eventi, ma se i due osservatori sono sufficientemente lontani i due eventi possono occorrere in luoghi differenti.

Il regime di "*Relative locality*" può essere formalizzato matematicamente: vediamo come. In Relatività Ristretta lo spazio delle fasi di una particella è dato dal prodotto cartesiano $\Gamma^{SR} = M \times P$ dove M è una varietà a metrica piatta così come P che rappresenta lo spazio dei momenti. In Relatività Generale lo spazio delle fasi non è più un prodotto cartesiano in quanto la varietà M ha ora una metrica curva: in questo caso lo spazio dei momenti per una particella in un determinato punto della varietà è individuato dallo spazio cotangente al punto in questione: in questo modo lo spazio delle fasi in Relatività Generale è il fibrato cotangente allo spazio tempo:

$$\Gamma^{GR} = T^*(M)$$

dove $T^*(M)$ ha ancora una geometria piana.

Se consideriamo invece il caso della "*Relative Locality*" abbiamo che è lo spazio dei momenti che è curvo e quindi lo spazio delle fasi non ha più una

geometria piana ma una geometria curva: varrà ancora la relazione precedente con l'accortezza di considerare geometrie non piane.

Questa struttura però a cosa porta? Immaginiamo di volere confrontare due impulsi di due particelle differenti in Relatività Generale: la unica possibilità che abbiamo è quella di traspostare il vettore dalla posizione della prima particella alla posizione della seconda attraverso un percorso sulla varietà e poi confrontare i due vettori nello stesso punto. Questo è permesso in quanto per il trasporto parallelo si utilizza la connessione affine sullo spazio-tempo e si utilizza il fatto che lo spazio dei momenti è piatto. Ma cosa accade se nel framework della *Relative Locality* ci chiediamo se due particelle con differente impulso si incontrano in un certo punto dello spazio-tempo? Non possiamo imporre la condizione che le coordinate delle due particelle coincidano in quanto vivono su spazi differenti (hanno impulsi diversi): l'unica cosa che possiamo chiedere è che esista un trasporto parallelo nello spazio delle fasi che porti una particella nell'altra. In termini matematici questo significa che esiste una trasformazione lineare U che mappa le coordinate spazio-temporali associate al momento p della particella A a quelle del momento p associate alla particella B :

$$x_B^\mu = [U_\gamma]_\nu^\mu x_A^\nu$$

Se infine sviluppiamo la trasformazione lineare in termini di connessione affine otteniamo che

$$[U_\gamma]_\nu^\mu = \delta_\mu^\nu + \frac{1}{M_P} \Gamma_\mu^{\nu\rho} p_\rho + \dots$$

da cui si deduce che la differenza fra x_A^μ e x_B^ν è proporzionale a x_A^μ e p^ν .

Si può inoltre dire che in prima approssimazione la deviazione di localizzazione è determinata da:

$$\Delta x = x \frac{E}{M_P}$$

da cui infine si deduce che la piccolezza del rapporto $1/M$ è compensato dalla grandezza della distanza. Questa ultima considerazione è importantente in quanto ci mostra come gli effetti di "*Relative Locality*" possono essere osservati su distanze astronomiche.

References

- [1] Freidel L. Kowalski-Glikman-J. Smolin L Amelino-Camelia, G. The principle of relative locality. *arXiv:1101.0931 [hep-th]*, 2011.
- [2] J. Kowalski-Glikman L. Smolin G. Amelino-Camelia, L. Freidel. Relative locality: a deepening of the relativity principle. *Gen Relativ Gravit*, 2011.