

Capitolo 4

La metrica di transizione

4.1 La metrica di transizione

Consideriamo due spazi tempo (M_1, g_1) e (M_2, g_2) limitati da due ipersuperfici Σ_1 e Σ_2 . Le sottovarietà suddividono M_1 ed M_2 in due regioni

$$\begin{aligned}M_1 &= M_1^- \cup M_1^+ \\M_2 &= M_2^- \cup M_2^+\end{aligned}$$

Un incollamento fra i due spazi-tempo avviene individuando Σ_1 con Σ_2 ed un esempio è dato da

$$B = M_1^- \cup M_2^+ \quad (4.1)$$

La sottovarietà $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2$ è allora una superficie singolare attraverso cui le derivate della metrica sono discontinue. Per riportare il tensore metrico ad essere di classe C^2 su tutto B , si sostituisce l'ipersuperficie Σ con una varietà quadridimensionale $M_{(tr)}$ su cui è definita una metrica di transizione $g_{(tr)}$ con particolari proprietà.[7] Richiederemo cioè che il tensore metrico $g_{(tr)}$ sia di classe C^2 su tutta la varietà di transizione e che si raccordi con g_1 e g_2 in modo tale da garantire la continuità non solo della metrica ma anche delle sue derivate seconde. Considerando una tale metrica di transizione si introduce in $M_{(tr)}$ anche un tensore energia momento $T_{(tr)}^{\mu\nu}$ che si raccorda con continuità con $T_{(est)}^{\mu\nu}$ e $T_{(int)}^{\mu\nu}$. In questo modo il passaggio di $T^{\mu\nu}$ da M_1^- a M_2^+ avviene con gradualità e non con un salto netto come negli incollamenti abituali.

In questo capitolo calcoleremo alcune metriche di transizione ma ciò non è sufficiente a garantire l'esistenza della varietà $M_{(tr)}$. Infatti la $g_{(tr)}$ può soddisfare tutte le condizioni di continuità richieste ma il tensore energia-momento $T_{(tr)}^{\mu\nu}$ può avere proprietà fisiche inaccettabili. Sarà così necessario controllare che $T_{(tr)}^{\mu\nu}$ soddisfi alcune condizioni sull'energia.

Lo spazio-tempo B diviene ora

$$B = M_1^- \cup M_{tr} \cup M_2^+ \quad (4.2)$$

dove l'incollamento fra M_1^- ed M_2^+ con M_{tr} avviene su due superfici S_1 ed S_2 di tipo tempo individuate dalle equazioni

$$\begin{aligned} S_1 : r &= r_0 - \varepsilon \\ S_2 : r &= r_0 + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.3)$$

Posizioniamoci ora su S_1 ed utilizziamo coordinate gaussiane. Varranno le (3.16a) - (3.18a). Calcolandole per M_1 e M_{tr} , facendo la differenza dei risultati ottenuti nei due casi, si ha

$$\begin{aligned} [R_{ij}] &= [\partial_0 K_{ij}] = 0 \\ [R_{i0}] &= 0 \\ [R_{00}] &= [\partial_0 K_{ij}] g^{ij} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} [G_{ij}] &= [\partial_0 K_{ij}] - g_{ij} g^{mn} [\partial_0 K_{mn}] = 0 \\ [G_{i0}] &= 0 \\ [G_{00}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove si è tenuto conto della continuità delle derivate seconde della metrica attraverso S_1 .

Dalla (4.4) si deduce che le superfici S_i sono individuate dalla condizione

$$[\partial_\mu K_{ij}] = 0 \quad (4.6)$$

La (4.5) invece garantisce che il tensore di Einstein - e quindi anche $T^{\nu\nu}$ - è continuo attraverso le S_i

4.1.1 Condizioni sull'energia

Il tensore energia-momento soddisfa alcune disuguaglianze che sono accettabili fisicamente.[10] La prima che consideriamo è la *condizione di energia debole*.

Il tensore energia-momento calcolato in un punto P di una varietà M soddisfa la condizione

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0 \quad (4.7)$$

dove W^μ è un vettore di tipo tempo o luce. Se inoltre W è tangente in P alla linea di universo di un osservatore, la (4.7) ci dice che la densità di energia, misurata localmente, è positiva.

Tutti i campi fisici osservabili in natura hanno un tensore energia-momento di forma

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

dove si è usata una base ortonormale $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ fissata in P . $T^{\mu\nu}$ in questo caso ha come unico autovettore \vec{e}_0 ($\mu \neq p_i$) e l'autovalore μ rappresenta la densità di energia misurata da un osservatore situato in P , mentre le p_i sono le *pressioni principali* lungo le tre direzioni spaziali \vec{e}_i .

La condizione di energia debole, riletta secondo la (4.8) diviene

$$\begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ \mu + p_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tenendo inoltre conto del legame fra tensore energia-momento e tensore di Einstein la (4.9) assume la forma

$$\begin{aligned} G_{00} &\geq 0 \\ G_{00} + G_{ii} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

diseguaglianze che garantiscono la validità delle condizioni di energia debole. La seconda condizione sull'energia che ci interessa prende il nome di *condizione di energia dominante* e richiede - oltre le (4.10) - che il flusso di energia $q^\mu = T^\mu_\nu W^\nu$ lungo la direzione W^ν non sia un vettore di tipo spazio:

$$q^\mu q_\mu < 0 \quad (4.11)$$

In altre parole si richiede che la velocità del flusso di energia non superi quella della luce.

Se scegliamo poi una base ortonormale ed un tensore energia momento come nella (4.8), la (4.11) è equivalente a

$$T^{00} - |T^{ii}| \geq 0$$

che riletta nei termini del tensore di Einstein diviene

$$G^{00} - |G^{ii}| \geq 0$$

Le condizioni di energia dominante sono allora

$$\begin{aligned} G^{00} &\geq 0 \\ G^{00} - |G^{ii}| &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2 Considerazioni generali

Studieremo nella restante parte del capitolo l'incollamento fra due metriche di Schwarzschild con masse diverse e fra una metrica di Minkowski ed una di Schwarzschild.

A tal fine consideriamo due metriche "Ricci-piatte" in coordinate isotrope

$$ds_1^2 = - \left(\frac{h_1(r)}{g_1(r)} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{g_1(r)}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.13a)$$

$$ds_2^2 = - \left(\frac{h_2(r)}{g_2(r)} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{g_2(r)}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.13b)$$

che si incollano su una superficie statica Σ di tipo tempo individuata da $r = r_0$. La Σ è una superficie di discontinuità per le derivate della metrica; sostituiamola con una varietà di transizione $M_{(tr)}$, delimitata dalle due superfici S_1 ed S_2 di equazione (4.3).

Il tensore misto G_{ν}^{μ} che si ottiene dalle (4.13a) - (4.13b) coincide con quello calcolato nella base ortonormale

$$\begin{aligned} e_0 &= \left(\frac{h_i(r)}{g_i(r)} \right) dt \\ e_1 &= \left(\frac{g_i(r)}{2r} \right)^2 dr \\ e_2 &= \left(\frac{g_i(r)}{2r} \right)^2 r d\theta \\ e_3 &= \left(\frac{g_i(r)}{2r} \right)^2 r \sin \theta d\varphi \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove $i = 1, 2$.

Così le uniche componenti interessanti di $G_{\mu\nu}$ in questa base sono¹

$$G_{00} = -G_0^0 = -64r^4 \left(\frac{\partial^2 g_i(r)}{\partial r^2} \right) g_i(r)^{-5} \quad (4.15a)$$

$$G_{11} = G_1^1 = 32r^3 g_i(r)^{-5} h_i(r)^{-1} \left(-h_i(r) \frac{\partial g_i(r)}{\partial r} \right) \quad (4.15b)$$

$$+ 2r \frac{\partial g_i(r)}{\partial r} \frac{\partial h_i(r)}{\partial r} - g_i(r) \frac{\partial h_i(r)}{\partial r} \quad (4.15c)$$

$$G_{22} = G_2^2 = 16r^3 g_i(r)^{-5} h_i(r)^{-1} \left(h_i(r) \frac{\partial g_i(r)}{\partial r} \right) \quad (4.15d)$$

$$+ r h_i(r) \frac{\partial^2 g_i(r)}{\partial r^2} + g_i(r) \frac{\partial h_i(r)}{\partial r} - 2r \frac{\partial g_i(r)}{\partial r} \frac{\partial h_i(r)}{\partial r} + r g_i(r) \frac{\partial^2 h_i(r)}{\partial r^2} \quad (4.15e)$$

$$G_{33} = G_{22} \quad (4.15f)$$

La (4.13a) descrive uno spazio "Ricci-piatto", quindi vale

$$G_{00} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g_i(r)}{\partial r^2} = 0$$

cioè la $g_i(r)$ è una retta

$$g_i(r) = Ar + B \quad (4.16)$$

Nel caso di una metrica di Schwarzschild o di Minkowski la funzione $h(r)$ è ancora una retta

$$h_i(r) = Cr + D \quad (4.17)$$

Sostituendo le (4.16) e (4.17) nelle (4.20a) e (4.20b) si ottiene

$$G_{11} = -\frac{1}{2}G_{22} = -32r^3 \frac{(AD + CB)}{(Ar + B)^5 (Cr + D)} = 0$$

¹Le stesse equazioni si ottengono per la () sostituendo $g(r)$ con $g'(r)$ e $h(r)$ con $h'(r)$.

equazione che si verifica se

$$AD + CB = 0 \quad (4.18)$$

Da ciò segue che i coefficienti della funzione $h_i(r)$ sono proporzionali a quelli di $g_i(r)$.

La metrica di transizione $g_{(tr)}$ ha forma

$$ds_{(tr)}^2 = - \left(\frac{\beta(r)}{\alpha(r)} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{\alpha(r)}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.19)$$

e si raccorderà in maniera continua fino al secondo ordine con ds_1^2 e ds_2^2 .

Le componenti $G_{\mu\nu}$, relative alla metrica (4.19), si ottengono dalle (4.15a) - (4.15f) scambiando $g_i(r)$ con $\alpha(r)$ e $h_i(r)$ con $\beta(r)$:

$$G_{00} = -G_0^0 = -64r^4 \left(\frac{\partial^2 \alpha(r)}{\partial r^2} \right) \alpha(r)^{-5} \quad (4.20a)$$

$$G_{11} = G_1^1 = 32r^3 \alpha(r)^{-5} \beta(r)^{-1} \left(-\beta(r) \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} \right) \quad (4.20b)$$

$$+ 2r \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} \frac{\partial \beta(r)}{\partial r} - \alpha(r) \frac{\partial \beta(r)}{\partial r} \quad (4.20c)$$

$$G_{22} = G_2^2 = 16r^3 \alpha(r)^{-5} \beta(r)^{-1} \left(\beta(r) \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} \right) \quad (4.20d)$$

$$+ r \beta(r) \frac{\partial^2 \alpha(r)}{\partial r^2} + \alpha(r) \frac{\partial \beta(r)}{\partial r} - 2r \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} \frac{\partial \beta(r)}{\partial r} + r \alpha(r) \frac{\partial^2 \beta(r)}{\partial r^2} \quad (4.20e)$$

$$G_{33} = G_{22} \quad (4.20f)$$

Dalla prima delle (4.12) e dalla (4.20a) si deduce subito che l'incollamento è possibile se

$$G_{00} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \alpha(r)}{\partial r^2} \leq 0 \quad (4.21)$$

a patto che la $\alpha(r)$ sia una funzione positiva.

La (4.21) ci dice che la funzione di raccordo $\alpha(r)$ deve avere concavità rivolta verso il basso. Questa condizione è facile da controllare perché le funzioni $g_i(r)$ e $g_i(r)$ che si incollano sono delle rette.

Data la complessità delle (4.20b) - (4.20f) e delle funzioni $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ - che saranno polinomi di quinto grado - le ulteriori disuguaglianze delle condizioni di energia dominante saranno più difficili da verificare.

4.3 L'incollamento Minkowski-Schwarzschild

L'incollamento forse più studiato della letteratura scientifica sull'argomento è quello fra una metrica di Minkowski ed una di Schwarzschild.[8] In coordinate isotrope abbiamo

$$ds_{(M)}^2 = - \left(\frac{2r_0 - M}{2r_0 + M} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.22a)$$

$$ds_{(S)}^2 = - \left(\frac{2r - M}{2r + M} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.22b)$$

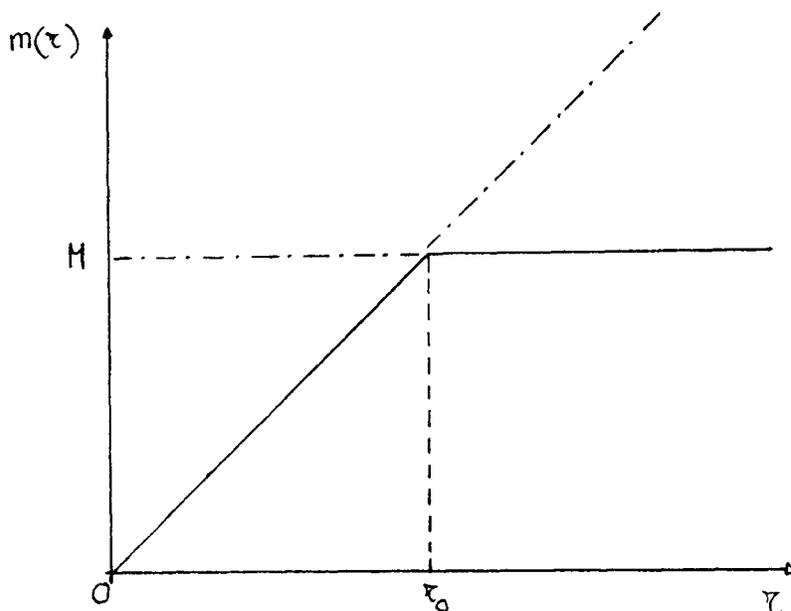
dove $r_0 = \text{costante}$ è il raggio della sfera su cui si fa l'incollamento. Le (4.22a) - (4.22b) possono essere rilette in un'unica forma definendo la metrica

$$ds^2 = - \left(\frac{2r - m(r)}{2r + m(r)} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m(r)}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.23)$$

con

$$m(r) = \begin{cases} \frac{M}{r_0} r & r < r_0 \\ M & r > r_0 \end{cases} \quad (4.24)$$

La (4.24) è continua su r_0 come si vede dalla (4.1)



Introduciamo ora una metrica di transizione nella regione $r_0 - \varepsilon < r < r_0 + \varepsilon$:

$$ds_{(tr)}^2 = - \left(\frac{2r - f(r)}{2r + f(r)} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{f(r)}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.25)$$

dove $f(r)$ è un polinomio che si raccorda all'ordine C^2 con $m(r) = \frac{M}{r_0}r$ per $r = r_1 = r_0 - \varepsilon$ e con $m(r) = M$ per $r = r_2 = r_0 + \varepsilon$.

Per determinare le funzioni di transizione - tipo $f(r)$ - e per disegnare i grafici che seguiranno, si è usato Maple. [2][3] Il programma che ci permette di calcolare $f(r)$ è il seguente:

Programma 1

```

1 # Definisco le funzioni da raccordare #
2 Pol[int]:=M/r0*r;
3 Pol[ext]:=M;
4 # Definisco la funzione di raccordo #
5 fun_m:=sum('a.(i)*(r-r2)^(i)', 'i'=0..5);
6 var_m:=seq(a.(i), i=0..5);
7 # Costruiamo le equazioni che deve soddisfare
8 # fun_m affinché si raccordi fino al secondo
9 # ordine con Pol[int] e Pol[ext] per r=r1 e r=r2
10 eqn_m:=subs(r=r1, fun_m)=subs(r=r1, Pol[int]),
11 subs(r=r2, fun_m)=subs(r=r2, Pol[ext]),
12 subs(r=r1, diff(fun_m, r))=subs(r=r1, diff(Pol[int], r)),
13 subs(r=r2, diff(fun_m, r))=subs(r=r2, diff(Pol[ext], r)),
14 subs(r=r1, diff(fun_m, r, r))=subs(r=r1, diff(Pol[int], r, r)),
15 subs(r=r2, diff(fun_m, r, r))=subs(r=r2, diff(Pol[ext], r, r));
16 #Risolviamo le equazioni in modo da ottenere
17 # i coefficienti del polinomio
18 solve({eqn_m}, {var_m});
19 sol_m:=factor('');
20 fun_m:=subs(sol_m, fun_m);
21 # Salviamo il risultato
22 save fun_m, 'poly.ms';

```

La funzione di transizione è

$$f(r) = M - \frac{2M(2r_2 + 3r_1 - 5r_0)(r - r_2)^3}{r_0(r_2 - r_1)^3} - \frac{M(7r_2 + 8r_1 - 15r_0)(r - r_2)^4}{r_0(r_2 - r_1)^4} \quad (4.26)$$

È facile rendersi conto che l'incollamento è possibile: dalla (4.21) si ha che $G_{00} > 0$ solo se $f(r)$ ha concavità verso il basso, ma il calcolo della derivata seconda di $f(r)$ porta ad avere

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} = \frac{3M(r-r_2)(r-r_1)}{\varepsilon r_0} < 0$$

che è minore di zero per $r_1 < r < r_2$. Si poteva comunque evitare il calcolo della derivata seconda, perché già dal grafico della (4.1) era evidente che la funzione di transizione aveva la concavità rivolta verso il basso. Un medesimo ragionamento ci impedisce di costruire l'incollamento inverso con Schwarzschild all'interno e Minkowski all'esterno; infatti la funzione di raccordo in questo caso ha la concavità verso l'alto.

Passiamo ora a considerare le altre due disequaglianze della condizione di energia dominante. Per il calcolo delle componenti del tensore di Einstein è sufficiente sostituire nelle (4.20a) (4.20d)

$$\alpha(r) = f(r) + 2r \quad (4.27a)$$

$$\beta(r) = 2r - f(r) \quad (4.27b)$$

Il risultato che si ottiene sono un insieme di funzioni che qui non è necessario riportare. Le componenti G_{11} e G_{22} sono però sufficientemente complesse da impedire una trattazione analitica delle condizioni

$$G_{00} - |G_{11}| > 0$$

$$G_{00} - |G_{22}| > 0$$

Seguiremo dunque una via grafica, disegnandole con Maple. Il programma utilizzato per il calcolo delle funzioni da disegnare, è il seguente:

Programma 2

```

1 # Leggiamo le componenti del tensore di Einstein
2 read 'ETT.ms';
3 # Leggiamo le funzioni di transizione
4 read 'poly.ms';
5 # Creiamo una procedura per il calcolo
6 # delle componenti da disegnare
7 smp:=proc(u)
8 u:
9 subs(alpha(r)=2*r+fun_m,beta(r)=2*r-fun_m,''):

```

```

10 subs(r2=r0+epsilon,r1=r0-epsilon,''):
11 subs(r=r0+epsilon*x,'');
12 subs(M=2*r0*mu,epsilon=r0*tau,''):
13 normal(r0*('')):factor(''):
14 subs(mu=0.005,tau=1/1000,''):
15 normal(''):
16 end;

```

Alcune sostituzioni che compaiono nella procedura del programma necessitano di chiarificazioni. Nella riga 10 abbiamo specificato che ci interessa valutare le componenti del tensore di Einstein nell'intervallo $r_0 - \varepsilon < r < r_0 + \varepsilon$ con $-1 < x < 1$. Inoltre il tensore $G_{\mu\nu}$ dipende da tre parametri (M, r_0, ε) che devono essere fissati per ottenere un grafico in Maple. Lasciamo r_0 libero di assumere un qualsiasi valore ma imponiamo che M ed ε siano notevolmente piú piccoli di r_0 . Questo è stato fatto tramite la riga 11 e 13. Infine per rendere il risultato adimensionale si è moltiplicato tutto per r_0 (la riga 12).

I grafici che si ottengono utilizzando il programma sopra scritto sono riportati qui di seguito.

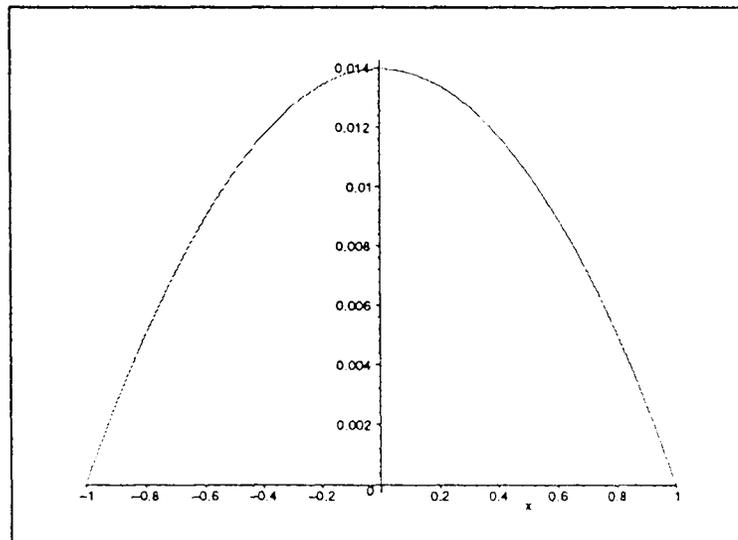
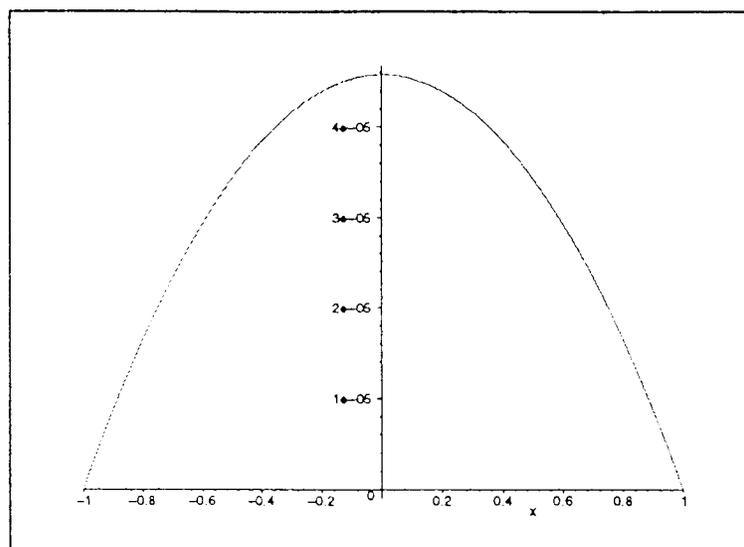
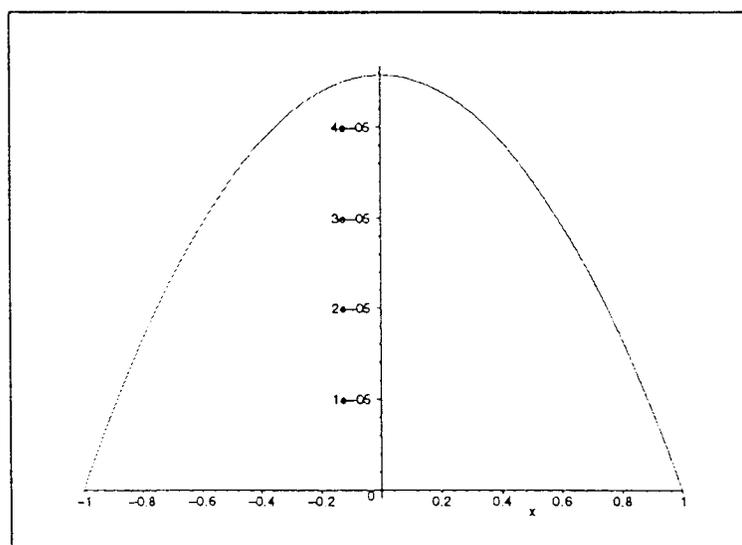


Figura 4.2: Componente G_{00}

fig.3: $G_{00} - |G_{11}|$ Figura 4.4: Componente G_{22}

Le tre componenti del tensore di Einstein sono tutte manifestamente maggiori di zero. È sufficiente dunque verificare che

$$G_{00} - G_{11} > 0$$

$$G_{00} - G_{22} > 0$$

ma dato che $G_{00} \gg G_{11}$ e $G_{00} \gg G_{22}$ i grafici che si ottengono sono praticamente uguali alla 4.1. In conclusione le tre condizioni di energia dominante per l'incollamento Minkowski-Schwarzschild sono verificate.

4.4 L'incollamento Schwarzschild-Schwarzschild

Applichiamo ora il metodo transizionale all'incollamento di due metriche di Schwarzschild in coordinate isotrope. A tal proposito consideriamo due metriche (4.22b) con masse differenti:

$$ds^2 = - \left(\frac{2\rho - M}{2\rho + M} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \quad (4.28)$$

$$ds^2 = - \left(\frac{2\rho - m}{2\rho + m} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \quad (4.29)$$

Per una trattazione più completa conviene riscrivere il tensore metrico interno nella forma

$$ds^2 = - \left(\frac{b_0 r - b_1}{a_0 r + a_1} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{a_0 r + a_1}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.30)$$

dove b_0 e b_1 sono proporzionali ad a_0 ed a_1 secondo la (??) :

$$b_0 = c a_0$$

$$b_1 = c a_1$$

Calcoliamo ora la massa m corrispondente alla metrica (4.30). A tal fine facciamo il cambio di coordinate

$$r = \rho \lambda^2 \quad (4.31)$$

e la metrica diviene

$$ds^2 = - \left(\frac{\frac{a_0 \lambda}{2} - \frac{a_1}{2\lambda \rho}}{\frac{a_0 \lambda}{2} + \frac{a_1}{2\lambda \rho}} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{a_0 \lambda}{2} + \frac{a_1}{2\lambda \rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \quad (4.32)$$

Affinché la (4.32) assuma la forma della (4.29) dobbiamo richiedere che

$$\frac{a_0 \lambda}{2} = 1 \quad (4.33a)$$

$$m = \frac{a_0 a_1}{2} \quad (4.33b)$$

Imponiamo ora che la (4.28) e la (4.30) siano continue su $r = r_0$. Limitandoci per ora alla parte spaziale abbiamo

$$a_0 r_0 + a_1 = 2r_0 + M \quad (4.34)$$

Da quest'ultima relazione, utilizzando la (4.33b) segue che

$$m = \frac{1}{2} (a_0 (2r_0 + M) - a_0^2 r_0) \quad (4.35)$$

cioè la massa interna è funzione solo di a_0 . Studiando la funzione $m(a_0)$ si ottiene il grafico

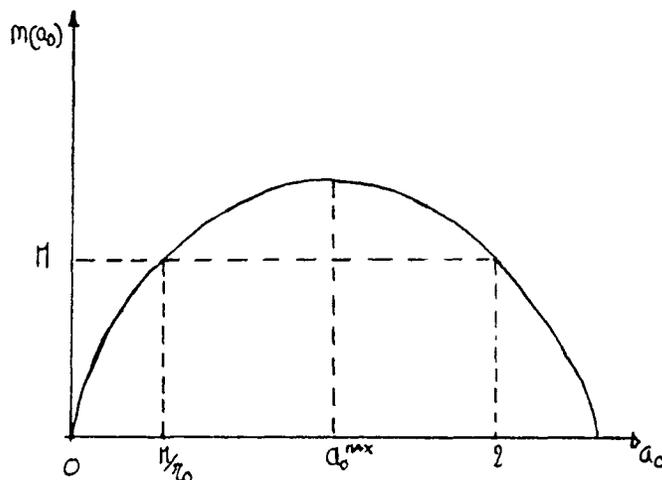


Figura 4.5: La funzione $m(a_0)$

le cui caratteristiche principali sono riportate nella seguente tabella

$m = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right)$	(4.36)
$m = M$	$a_0 = \frac{M}{r_0}$	$a_0 = 2$	
$m = m_{\max}$	$a_0 = 1 + \frac{M}{2r_0}$		

Sia dalla 4.5 che dalla tabella si deduce che ad una stessa massa corrispondono due metriche (4.30) con diversi coefficienti. Sarà opportuno allora suddividere l'intervallo di variabilità di a_0 in due regioni simmetriche rispetto ad a_0^{\max} :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_0 : a_0 > a_0^{\max}\} \\ A_2 &= \{a_0 : a_0 < a_0^{\max}\} \end{aligned} \quad (4.37a)$$

La suddivisione (4.37a) è importante perché ci permette di classificare gli incollamenti in tre categorie:

- 1 le due metriche corrispondono a valori di $a_0 \in A_1$
- 2 le due metriche corrispondono a valori di $a_0 \in A_2$
- 3 le due metriche corrispondono ad a_0 in regioni diverse.

che saranno affrontati nel seguito per stabilire quali siano possibili.

Ritorniamo ora alle metriche (4.28) e (4.30) ed imponiamo l'ulteriore condizione di continuità sulla parte temporale:

$$c(a_0 r_0 - a_1) = 2r_0 - M$$

da cui si ricava la "velocità della luce" c in funzione di a_0

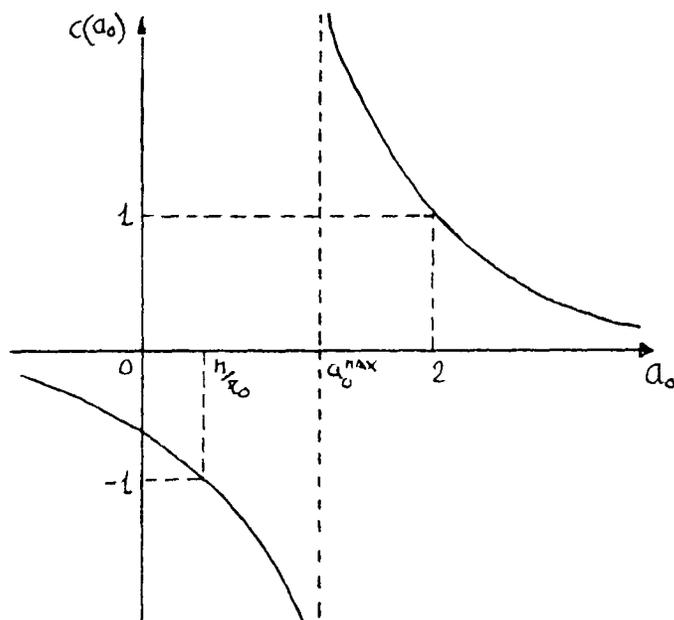
$$c = \frac{2r_0 - M}{2a_0 r_0 - 2r_0 - M} \quad (4.38)$$

Lo studio della funzione $c(a_0)$ porta al grafico di (4.6) della pagine seguente.

Anche in questo caso la $c(a_0)$ si comporta diversamente a seconda che si consideri la regione A_1 o la A_2 . In particolare è da notare che la c assume un valore infinito per $a_0 = a_0^{\max}$, dunque a_0^{\max} non dovrà essere preso in esame.

Per lo studio degli incollamenti una proprietà importante della metrica (4.30) è la seguente. Facciamo una trasformazione spaziale in modo da scambiare ciò che è interno ad r_0 con la regione esterna:

$$l : \rho \rightarrow \frac{r_0^2}{\rho} \quad (4.39)$$


 Figura 4.6: La funzione $c(a_0)$

Sostituendo nella metrica si ottiene

$$ds^2 = - \left(\frac{-a'_1 + a'_0 \rho'}{+a'_1 + a'_0 \rho'} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{+a'_1 + a'_0 \rho'}{2\rho'} \right)^4 (d\rho'^2 + \rho'^2 d\Omega^2) \quad (4.40)$$

dove

$$\begin{aligned} a'_1 &= r_0 a_0 \\ a'_0 &= a_1 / r_0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

La massa relativa alla (4.40) rimane però inalterata

$$m' = \frac{a'_0 a'_1}{2} = \frac{a_0 a_1}{2} = m \quad (4.42)$$

Abbiamo dunque una trasformazione spaziale che lascia inalterata la massa ma cambia i coefficienti delle metriche. Sostituendo nelle (4.41) alcuni valori di a_0 ed a_1 si osserva subito che la (4.39) manda la regione A_1 nella A_2 e viceversa. Ne consegue che gli spazi-tempo relativi all'intervallo A_2 $\{(M_{A_2}, g_i)\}$ si ottengono da quelli corrispondenti all'intervallo A_1 , $\{(M_{A_1}, g_j)\}$, scambiando l'interno con l'esterno.

4.4.1 Verifica delle condizioni di energia dominante

Per stabilire quali incollamenti siano possibili, utilizziamo il legame che sussiste fra la condizione di energia positiva e la concavità della funzione di transizione. Dobbiamo ora costruire un grafico che riporti l'insieme delle rette $y = a_0 r + a_1$ corrispondenti ai valori di m della (4.42). Il disegno che si ottiene è il seguente

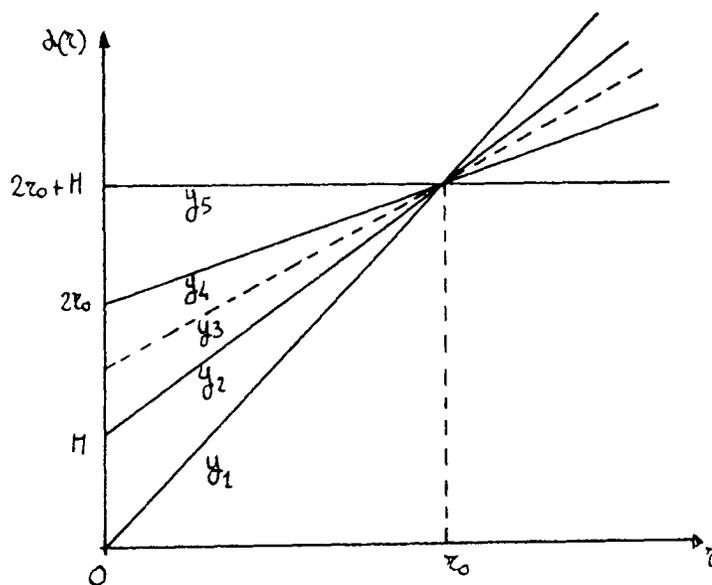


Figura 4.7:

e le sue principali caratteristiche sono riportate in tabella

	A_1	A_2	
$m = 0$	$y_1 = 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r$	$y_5 = 2r_0 + M$	(4.43)
$m = M$	$y_4 = \frac{M}{r_0} r + 2r_0$	$y_2 = 2r + M$	
$m = m_{\max}$	$y_3 = \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r + \frac{1}{2} (2r_0 + M)$		

I dati della (4.5) sono leggibili facilmente anche nella (4.7); infatti ogni retta y_i porta con sé una massa che cresce a partire da y_1 fino a raggiungere un massimo in y_3 per poi decrescere nuovamente fino a zero su y_5 . L'intervallo

A_1 allora corrisponde alla regione di piano delimitata dalle rette y_1 e y_3 , mentre A_2 porta alla regione compresa fra y_3 e y_5 .

Dal grafico della (4.7) sembrerebbe che la suddivisione in regione interna ad r_0 e parte esterna sia evidente, ma bisogna sempre tener presente che siamo in coordinate isotrope e ρ non è il raggio effettivo. Così può accadere che mentre ci muoviamo verso ρ crescenti a partire ad esempio da r_0 il raggio effettivo R risulta invece decrescere. In questo caso allora non saremo in una regione esterna ma in una interna ad r_0 .

Per rendere più chiare queste considerazioni ricordiamo come R dipenda da ρ :

$$R(\rho) = \rho \left(\frac{a_0 \rho + a_1}{2\rho} \right) \quad (4.44)$$

La (4.44) presenta un massimo per $\rho = -a_1/a_0$ - che non è accettabile in quanto negativo - ed un minimo per $\rho_m = a_1/a_0$. Disegnando la funzione si ottiene il grafico

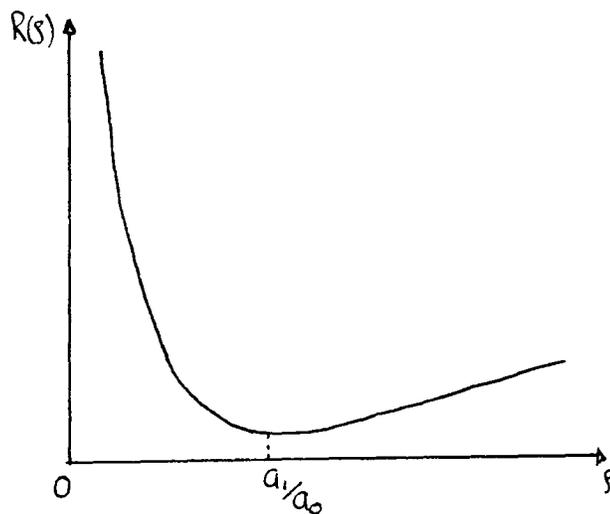


Figura 4.8: La funzione $R(\rho)$

Si considererà d'ora in avanti solo la parte positiva, in quanto il raggio effettivo non può essere negativo. Prendiamo in esame i vari casi.

Se consideriamo le rette relative all'intervallo A_1 è facile rendersi conto che $r_0 > \rho_m$ e dunque l'incollamento si trova in una regione dove al crescere di ρ aumenta anche $R(\rho)$. La differenza fra parte interna ad r_0 e regione esterna è ora coincidente con quella disegnata in (4.7).

Nel caso invece delle rette dell'intervallo A_2 , r_0 è sempre minore di ρ_m ed il raggio $R(\rho)$ al crescere di ρ , prima decresce fino a ρ_m e poi aumenta indefinitamente. Ciò che nella (4.7) è indicato come esterno è ora una regione interna e viceversa. Possiamo ricapitolare la discussione nel seguente disegno

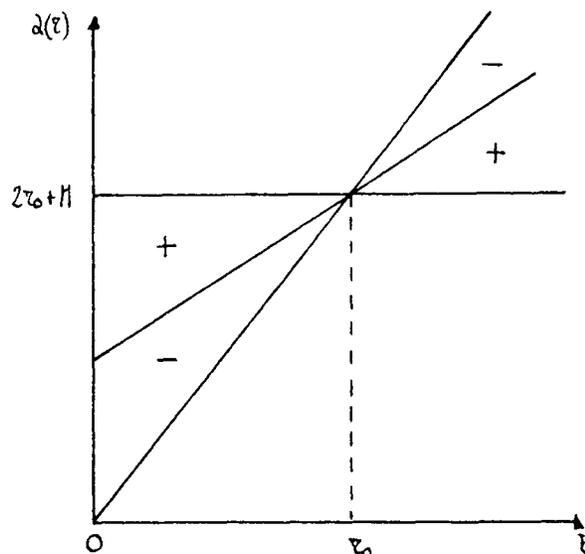


Figura 4.9:

dove il segno negativo rappresenta una varietà interna ad r_0 e il segno positivo una varietà esterna.

Indichiamo ora con

$$(y_i, y_j)$$

l'incollamento in cui la metrica interna corrisponde a y_i , mentre quella esterna è relativa a y_j .

Data la simmetria del problema una stessa saldatura si verifica sia nella regione corrispondente ad A_1 sia in quella relativa ad A_2 . Ad esempio l'incollamento Minkowski-Schwarzschild in A_1 è dato da (y_1, y_2) mentre in A_2

è (y_5, y_4) . È facile ora stabilire quale dei due abbia significato fisico; infatti (y_1, y_2) ha una funzione di transizione con concavità rivolta verso il basso e dunque soddisfa la condizione di energia positiva, il secondo invece non si verifica perché presenta una concavità verso l'alto.

Una situazione analoga si ha per l'incollamento inverso: nell'intervallo A_1 la saldatura Schwarzschild-Minkowski è irrealizzabile, mentre in A_2 essa soddisfa la condizione di positività dell'energia. Sembrerebbe allora che (y_4, y_5) sia fisicamente accettabile, ma esso non è nient'altro che il caso (y_1, y_2) con l'interno e l'esterno scambiati, come si vede dalla (4.9).

Bisogna inoltre considerare gli incollamenti misti che coinvolgono metriche in intervalli diversi. Le saldature che soddisfano la condizione di positività dell'energia in questi casi hanno tutte come metrica interna una g di A_1 , mentre all'esterno una g di A_2 . Sempre dalla (4.9) è evidente che stiamo incollando due metriche interne.

Ricapitolando possiamo fare la seguente tabella

Incollamenti possibili
$(y_1, \{y_m, y_2, y_4, y_{m1}, y_5\})$
$(y_m, \{y_2, y_4, y_{m1}, y_5\})$
$(y_2, \{y_4, y_{m1}, y_5\})$
$(y_4, \{y_{m1}, y_5\})$
(y_{m1}, y_5)

Rimangono ora da verificare le altre due disuguaglianze della condizione di energia dominante.

Un primo passo consiste nel costruire le funzioni di transizione utilizzando il Programma 1 con le debite sostituzioni. Si noti però che in questo caso le funzioni di transizione da calcolare sono due e non più una sola come nell'incollamento Minkowski-Schwarzschild.

La determinazione delle funzioni da disegnare per verificare le condizioni sull'energia risulta leggermente più complessa. Potremmo seguire la via indicata nell'incollamento Minkowski-Schwarzschild, costruendo un programma simile al Programma 2, ma possiamo fare un'ulteriore passo. Richiediamo che la parte temporale delle due metriche da saldare non sia continua su r_0 ; in questo caso la velocità della luce c non ha più un valore fissato dalla (4.38) ma diviene

$$c = \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1} (1 + d) \quad (4.45)$$

dove d determina l'intorno di c_0 .² La larghezza di questo intorno sarà ovviamente ottenuta richiedendo che in esso le condizioni di energia dominante siano verificate.

Le funzioni che creano maggiori problemi sono le $G_{00} - |G_{22}|$, perché i due termini sono paragonabili e può accadere che la loro differenza diventi negativa. La $(G_{00} - |G_{22}|)$ dipende ora da r e da d - una volta fissati gli altri parametri - diventando così a due variabili. L'andamento di $(G_{00} - |G_{22}|)$ è riportato nel grafico seguente:

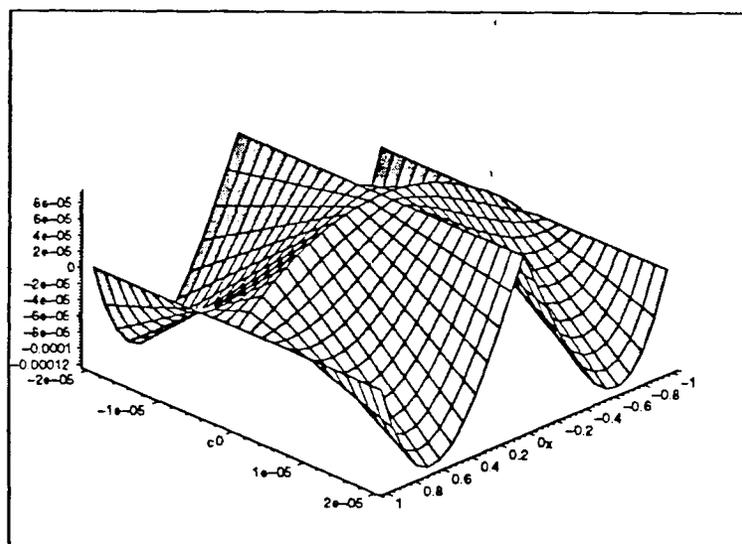


Figura 4.10: $G_{00} - |G_{22}|$

dove abbiamo imposto che c vari pochissimo intorno ad r_0 . Un disegno equivalente alla (4.10) è quello riportato in (4.11) nella pagina seguente

Dalle (4.10) e (4.11) vediamo chiaramente che esiste un'intorno di c_0 in cui la differenza $(G_{00} - |G_{22}|)$ è espressamente positiva. Il calcolo del raggio effettivo dell'intorno si ottiene fissando la variabile x e calcolando gli zeri della $(G_{00} - |G_{22}|)$, che risulta positiva fra i due valori ottenuti. Una volta calcolati gli zeri si sceglie quello in modulo minore.

² c_0 è il valore assunto da c per $d = 0$, cioè quando la parte temporale della metrica è continua su r_0 .

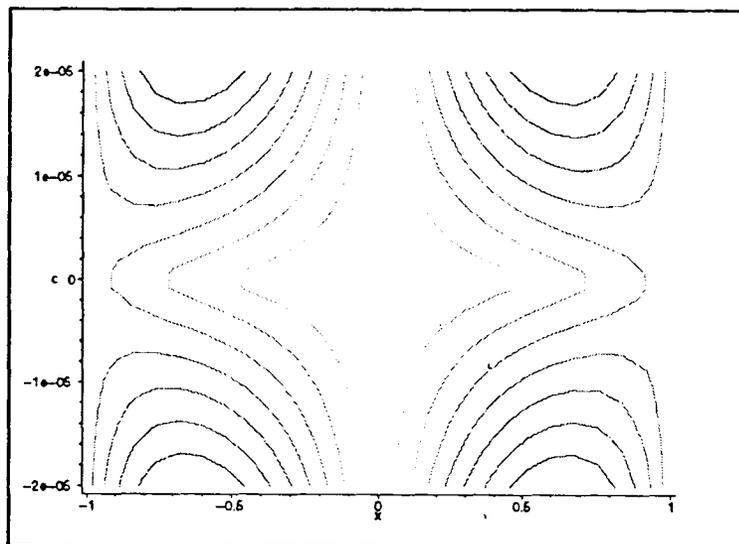


Figura 4.11: Superfici di livello per $G_{00} - |G_{22}|$

Queste considerazioni ci permettono di scrivere il seguente programma per determinare le componenti del tensore di Einstein da disegnare.

Programma 3

```

1 # Leggiamo le componenti del tensore di Einstein
2 read 'ETT.ms';
3 # Leggiamo le funzioni di transizione
4 read 'poly.ms';
5 # Creiamo una procedura per il calcolo delle
6 # funzioni da disegnare
7 smp0:=proc(u)
8     u:
9     subs(alpha(r) = fun_m,beta(r) = fun1_m,''):
10    subs(c = (2*r0-M)/(a0*r0-a1)*(1+d),''):
11    subs(a1 = 2*m/a0,''):
12    subs(m = 1/2*(a0*(2*r0+M)-a0^2*r0,''):
13    subs(r1 = r0-epsilon,r2 = r0+epsilon,''):
14    subs(r = r0+epsilon*tau,''):
15    subs(M = 2*mu*r0,epsilon = tau*r0,''):

```

```

16         normal(''): factor(''):
17 end;
18 # Dobbiamo ancora fissare i valori di mu, r0,tau e a0
19 smp:=poc(u)
20         smp0(u):
21         subs(mu=0.005,tau=1/1000,r0=400,''):
22         subs(a0=a0_x,''): # dove a0_x è il valore di a0
23         normal(''):
24 end;
25 # Calcoliamo le componenti del tensore di Einstein
26 j_00:=smp(ET_00):
27 j_11:=smp(ET_11):
28 j_22:=smp(ET_22):
29 # Calcoliamo ora il raggio dell'intorno di c0
30 sqrt(j_00^2)-sqrt(j_22^2):
31 subs(x=1.2,''):
32 dSol:=solve('',d):
33 map(abs,{dSol}):
34 dTemp:=min(op('')):
35 # Creiamo una procedura per la sostituzione di d
36 # con una nuova variabile
37 smpd:=proc(z) subs(d=q*dTemp,z) end;
38 # Le funzioni da disegnare sono le seguenti
39 ET1_00:=smpd(j_00):
40 ET1_11:=smpd(j_11):
41 ET1_22:=smpd(j_22):
42 s:=sqrt(smpd(j_00^2))-sqrt(smpd(j_11^2)):
43 t:=sqrt(smpd(j_00^2))-sqrt(smpd(j_11^2)):

```

Siamo ora in grado di considerare i vari casi

Incollamenti fra metriche relative ad A_1

Considereremo qui di seguito gli incollamenti fra metriche dell'intervallo A_1 . Il calcolo delle funzioni di transizione sarà fatto nel caso particolare in cui il parametro $d = 0$. Per ottenere invece le componenti del tensore di Einstein da disegnare bisognerà considerare per il Programma 1 funzioni di transizione in cui inizialmente i parametri a_0 e d non siano specificati.

caso (y_m, y_2)

Per il calcolo di $\alpha(r)$ sostituiamo nel programma 1

$$\text{Pol[int]} = a_0 r + a_1$$

$$\text{Pol[ext]} = 2r + M$$

dove $a_0 \in] 2, 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) [$ ed a_1 si può esprimere in funzione di a_0 . La $\alpha(r)$ diviene

$$\begin{aligned} \alpha(r) = & M + 2r - 2 \frac{(2r_2 a_0 - 4r_2 - 5M + 5a_1 + 3a_0 r_1 - 6r_1)(r - r_2)^3}{(r_2 - r_1)^3} + \\ & - \frac{(-14r_2 + 7r_2 a_0 - 16r_1 + 8a_0 r_1 + 15a_1 - 15M)(r - r_2)^4}{(r_2 - r_1)^4} + \\ & - 3 \frac{(2a_1 - 2M - 2r_1 + a_0 r_1 - 2r_2 + r_2 a_0)(r - r_2)^5}{(r_2 - r_1)^5} \end{aligned}$$

Per determinare $\beta(r)$ facciamo invece le sostituzioni

$$\text{Pol[int]} = c(a_0 r - a_1)$$

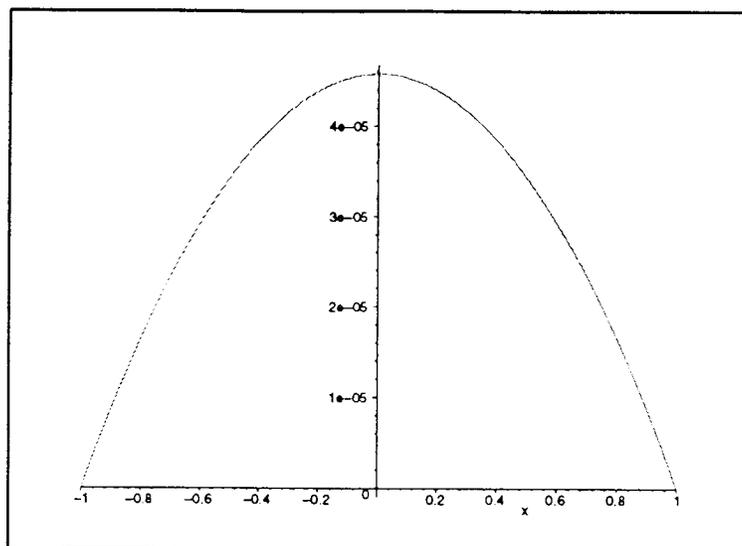
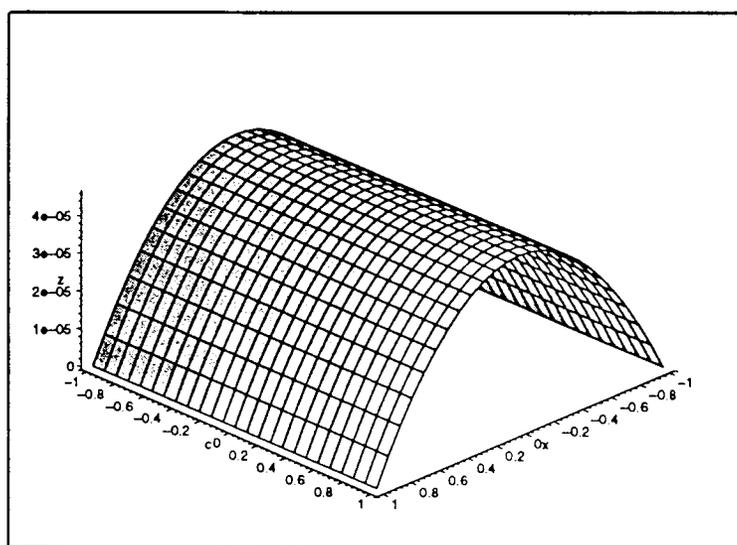
$$\text{Pol[ext]} = 2r - M$$

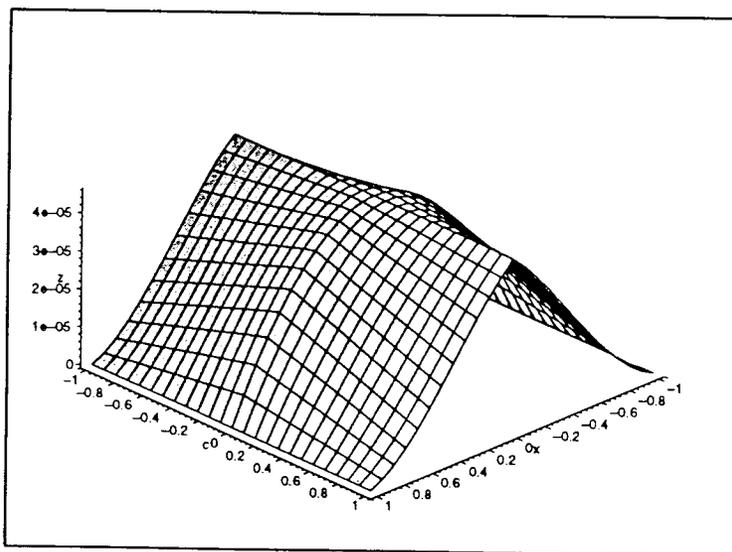
$$c = \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \beta(r) = & M + 2r + 2 \frac{(-2r_2 c a_0 + 4r_2 - 5M + 5c a_1 - 3c a_0 r_1 + 6r_1)(r - r_2)^3}{(r_2 - r_1)^3} \\ & + \frac{(14r_2 - 7r_2 c a_0 + 16r_1 - 8c a_0 r_1 + 15c a_1 - 15M)(r - r_2)^4}{(r_2 - r_1)^4} \\ & + 3 \frac{(2c a_1 - 2M + 2r_1 - c a_0 r_1 + 2r_2 - r_2 c a_0)(r - r_2)^5}{(r_2 - r_1)^5} \end{aligned}$$

I grafici relativi alle condizioni di energia dominante sono i seguenti

Figura 4.12 : G_{00} Figura 4.13 : $G_{00} - |G_{11}|$

Figura 4.14 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_1, y_m)

Per la funzione $\alpha(r)$ sostituisco nel Programma 1

$$\begin{aligned} \text{Pol[int]} &= 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= a_0 r + a_1 \end{aligned}$$

ricavando

$$\begin{aligned}
\alpha(r) = & a_0 r_2 + a_1 + a_0 (r - r_2) + \\
& -2 \frac{(2r_2 M - 2a_0 r_0 r_2 + 4r_0 r_2 + 6r_0 r_1 + 3r_1 M) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} \\
& - \frac{(5r_0 a_1 + 3a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} - \frac{(14r_0 r_2 + 7r_2 M) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\
& + \frac{(-7a_0 r_0 r_2 + 16r_0 r_1 + 8r_1 M - 15r_0 a_1 - 8a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\
& - 3 \frac{(2r_0 r_1 - a_0 r_0 r_1 - a_0 r_0 r_2 + r_1 M - 2r_0 a_1) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5} \\
& + \frac{(2r_0 r_2 + r_2 M) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5}
\end{aligned}$$

Se considero invece $\beta(r)$, faccio le sostituzioni

$$\begin{aligned}
\text{Pol[int]} &= 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r \\
\text{Pol[ext]} &= c (a_0 r + a_1) \\
c &= \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}
\end{aligned}$$

e ottengo

$$\begin{aligned}
\beta(r) = & -c (-a_0 r_2 + a_1) + c a_0 (r - r_2) + \\
& -2 \frac{(2r_2 M + 2c a_0 r_0 r_2 - 4r_0 r_2 - 6r_0 r_1 + 3r_1 M) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} \\
& + \frac{(-5r_0 c a_1 + 3c a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} + \frac{(-14r_0 r_2 + 7r_2 M) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\
& + \frac{(7c a_0 r_0 r_2 - 16r_0 r_1 + 8r_1 M - 15r_0 c a_1 + 8c a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\
& - 3 \frac{(-2r_0 r_1 + c a_0 r_0 r_1 + c a_0 r_0 r_2 + r_1 M - 2r_0 c a_1) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5} \\
& + \frac{(-2r_0 r_2 + r_2 M) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5}
\end{aligned}$$

Le condizioni di energia dominante sono verificate, come si vede vacilmente dai seguenti grafici

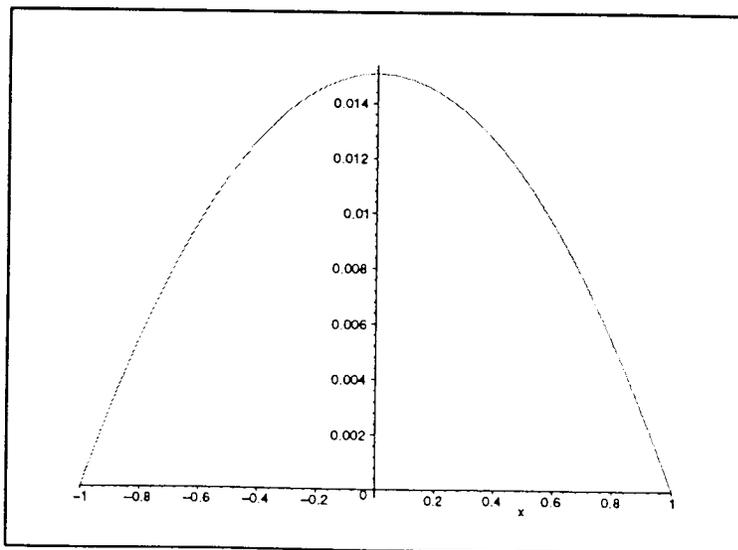


Figura 4.15 : G_{00}

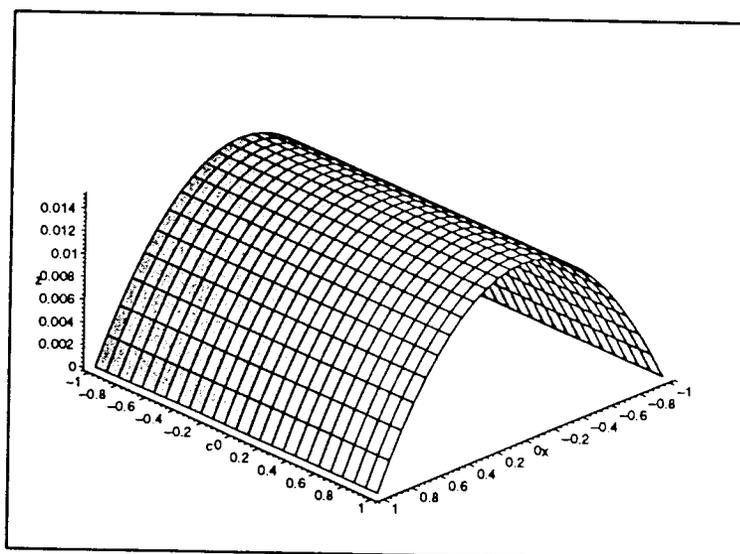
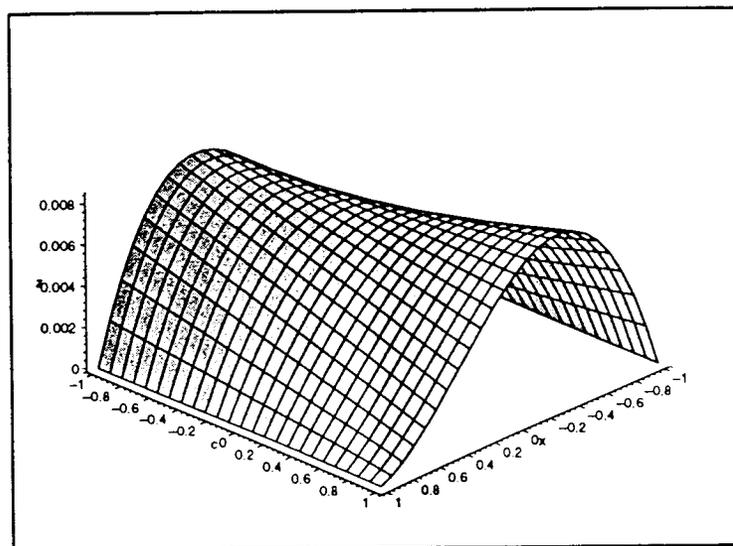


Figura 4.16 : $G_{00} - |G_{11}|$

Figura 4.17 : $G_{00} - |G_{22}|$

Incollamenti misti

Consideriamo ora gli incollamenti fra una metrica dell'intervallo A_1 ed una dell'intervallo A_2 . Ogni metrica di A_1 può essere saldata con tutte le metriche di A_2 come è evidente dalla concavità delle funzioni di transizione. Inoltre tutte le metriche di A_1 saranno nella regione interna. Varrano inoltre le stesse considerazioni fatte nei precedenti incollamenti sul calcolo delle funzioni di transizione e delle componenti del tensore di Einstein. Prendiamo in esame i vari casi.

caso (y_1, y_4)

Per la funzione $\alpha(r)$ faccio le sostituzioni

$$\begin{aligned} \text{Pol}[\text{int}] &= 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol}[\text{ext}] &= \frac{M}{r_0} r + 2r_0 \end{aligned}$$

e ottengo

$$\alpha(r) = \frac{Mr_2 + 2r_0^2}{r_0} + \frac{M(r - r_2)}{r_0} + 4 \frac{(3r_1 - 5r_0 + 2r_2)(r - r_2)^3}{(r_1 - r_2)^3} - 2 \frac{(8r_1 - 15r_0 + 7r_2)(r - r_2)^4}{(r_1 - r_2)^4}$$

Per la $\beta(r)$ invece sostituisco

$$\begin{aligned} \text{Pol[int]} &= 2 \left(1 - \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= 2r_0 - \frac{M}{r_0} r \end{aligned}$$

ricavando

$$\beta(r) = -\frac{Mr_2 - 2r_0^2}{r_0} - \frac{M(r - r_2)}{r_0} + 4 \frac{(3r_1 - 5r_0 + 2r_2)(r - r_2)^3}{(r_1 - r_2)^3} - 2 \frac{(8r_1 - 15r_0 + 7r_2)(r - r_2)^4}{(r_1 - r_2)^4}$$

I grafici relativi alle condizioni di energia dominante sono

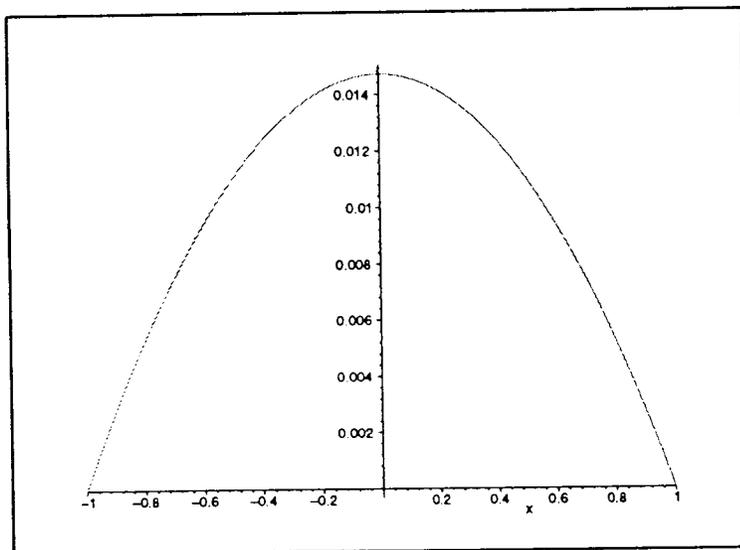
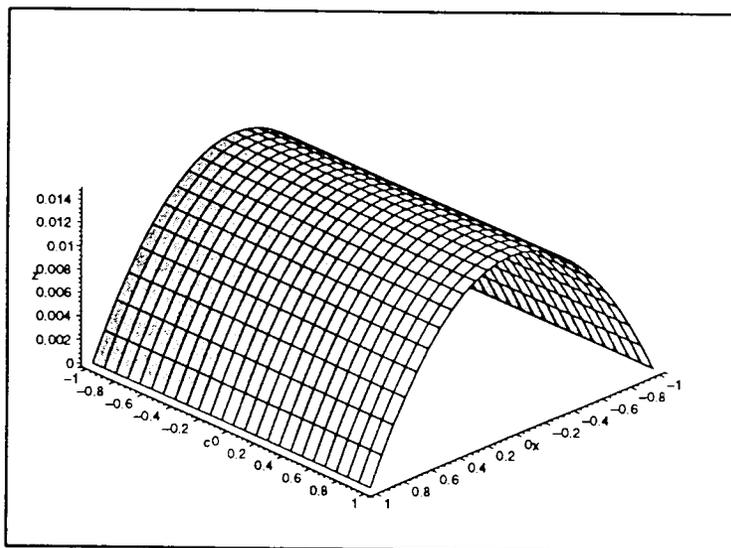
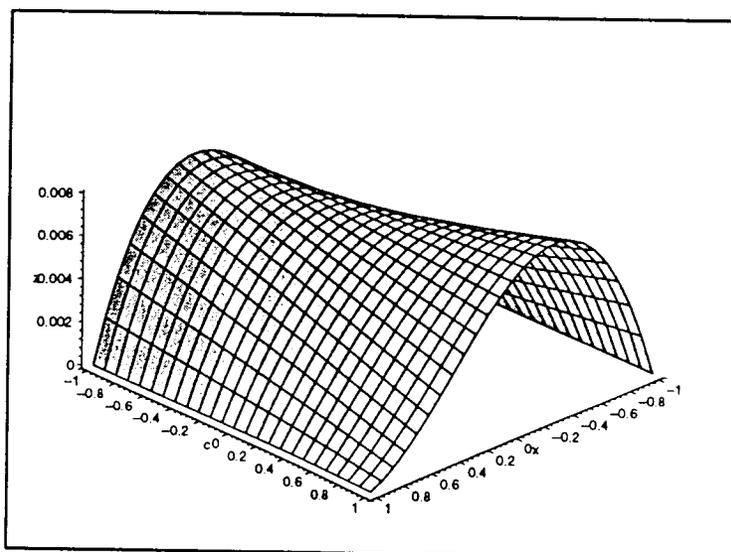


Figura 4.18 : G_{00}

Figura 4.19 : $G_{00} - |G_{11}|$ Figura 4.20 : $G_{00} - |G_{02}|$

caso (y_1, y_{m1}) ³

Le sostituzioni da fare in questo caso per ottenere la funzione di transizione $\alpha(r)$ sono

$$\begin{aligned}\text{Pol[int]} &= 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= a_0 r + a_1\end{aligned}$$

dove $a_0 \in \left] 0, \frac{M}{r_0} \right[$. Ottengo così

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= a_0 r_2 + a_1 + a_0 (r - r_2) + \\ &\quad - 2 \frac{(2r_2 M - 2a_0 r_0 r_2 + 4r_0 r_2 + 6r_0 r_1 + 3r_1 M) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} \\ &\quad + \frac{(-5r_0 a_1 - 3a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^3}{r_0 (r_2 - r_1)^3} - \frac{(14r_0 r_2 + 7r_2 M) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\ &\quad + \frac{(-7a_0 r_0 r_2 + 16r_0 r_1 + 8r_1 M - 15r_0 a_1 - 8a_0 r_0 r_1) (r - r_2)^4}{r_0 (r_2 - r_1)^4} \\ &\quad - 3 \frac{(2r_0 r_1 - a_0 r_0 r_1 - a_0 r_0 r_2 + r_1 M - 2r_0 a_1) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5} \\ &\quad + \frac{(2r_0 r_2 + r_2 M) (r - r_2)^5}{r_0 (r_2 - r_1)^5}\end{aligned}$$

Se si considera invece la funzione $\beta(r)$ sostituiremo

$$\begin{aligned}\text{Pol[int]} &= 2 \left(1 - \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= c (a_0 r - a_1) \\ c &= \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}\end{aligned}$$

³ y_{m1} è la retta corrispondente ad una massa m dell'intervallo A_1 .

ricavando

$$\begin{aligned}
 \beta(r) = & c(a_0 r_2 - a_1) + ca_0(r - r_2) + \\
 & -2 \frac{(2r_2 M + 2ca_0 r_0 r_2 - 4r_0 r_2 - 6r_0 r_1 + 3r_1 M)(r - r_2)^3}{r_0(r_1 - r_2)^3} \\
 & + \frac{(-5r_0 ca_1 + 3ca_0 r_0 r_1)(r - r_2)^3}{r_0(r_1 - r_2)^3} + \frac{(-14r_0 r_2 + 7r_2 M)(r - r_2)^4}{r_0(r_1 - r_2)^4} \\
 & + \frac{(7ca_0 r_0 r_2 - 16r_0 r_1 + 8r_1 M - 15r_0 ca_1 + 8ca_0 r_0 r_1)(r - r_2)^4}{r_0(r_1 - r_2)^4} \\
 & -3 \frac{(-2r_0 r_1 + ca_0 r_0 r_1 + ca_0 r_0 r_2 + r_1 M - 2r_0 ca_1)(r - r_2)^5}{r_0(r_1 - r_2)^5} \\
 & + \frac{(-2r_0 r_2 + r_2 M)(r - r_2)^5}{r_0(r_1 - r_2)^5}
 \end{aligned}$$

Le componenti del tensore di Einstein soddisfano tutte le disuguaglianze della condizione di energia dominante :

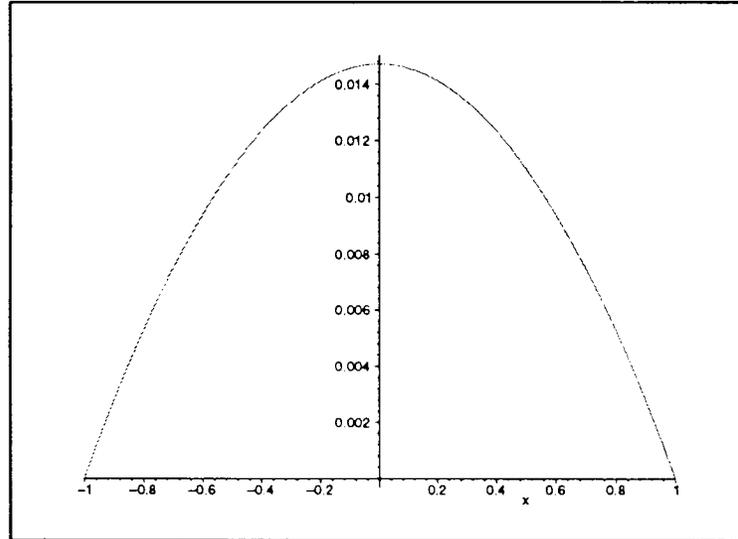
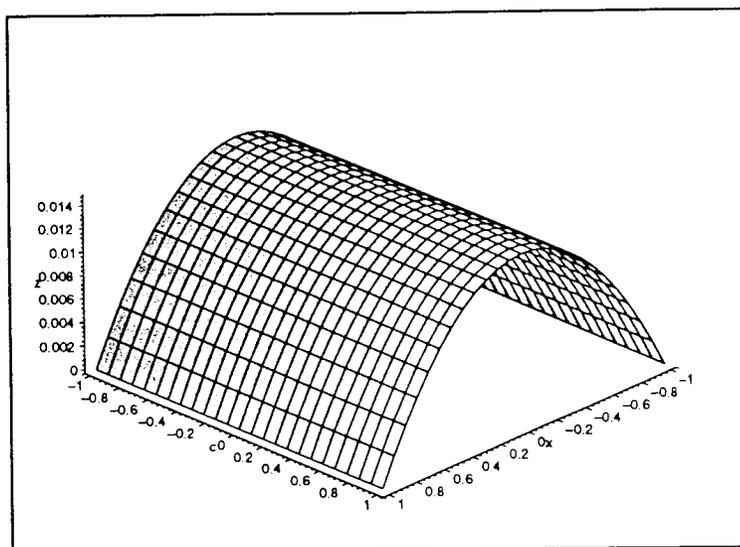
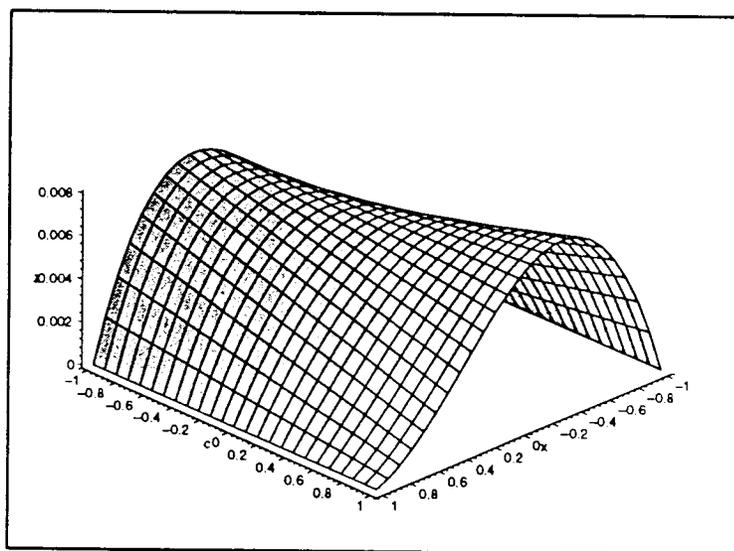


Figura 4.21 : G_{00}

Figura 4.22 : $G_{00} - |G_{11}|$ Figura 4.23 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_1, y_5)

Questo incollamento è particolarmente interessante perché coinvolge due metriche di Minkowski. Calcoliamo le funzioni di transizione nel solito modo: specifichiamo le sostituzioni da fare per la $\alpha(r)$:

$$\begin{aligned}\text{Pol[int]} &= 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= 2r_0 + M\end{aligned}$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= 2r_0 + M + 2 \frac{(-2r_2 - 3r_1 + 5r_0)(2r_0 + M)(r - r_2)^3}{r_0(r_2 - r_1)^3} \\ &\quad + \frac{(-7r_2 + 15r_0 - 8r_1)(2r_0 + M)(r - r_2)^4}{r_0(r_2 - r_1)^4}\end{aligned}$$

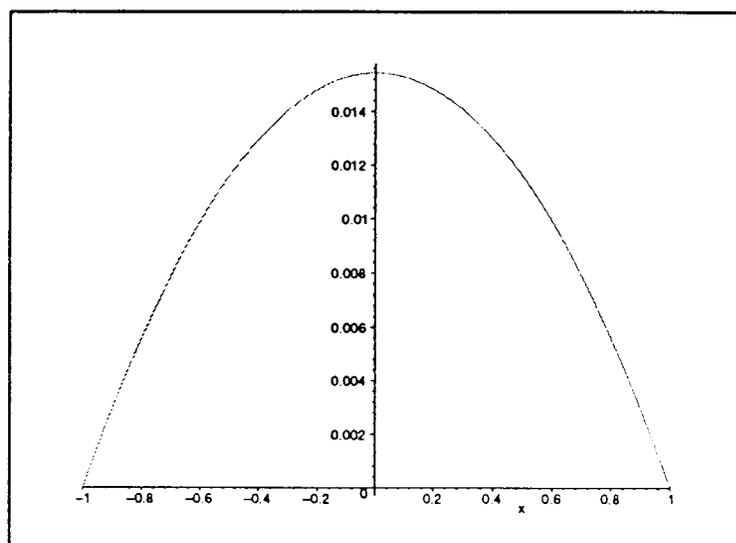
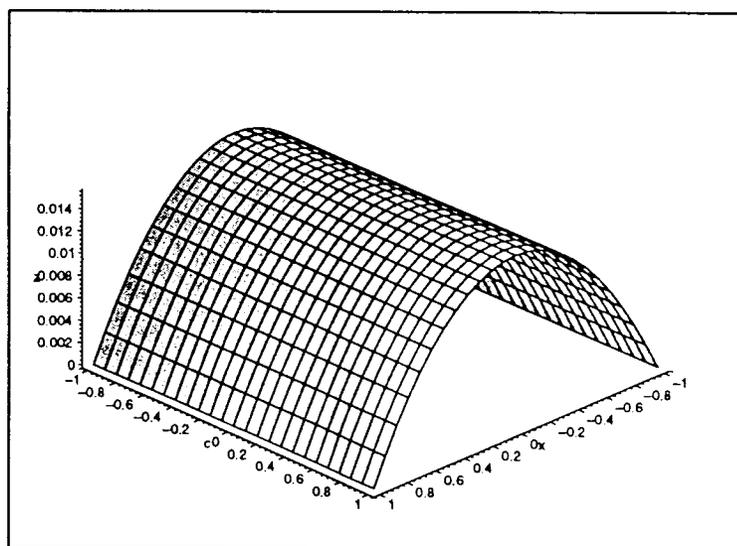
Per la $\beta(r)$ invece le sostituzioni sono

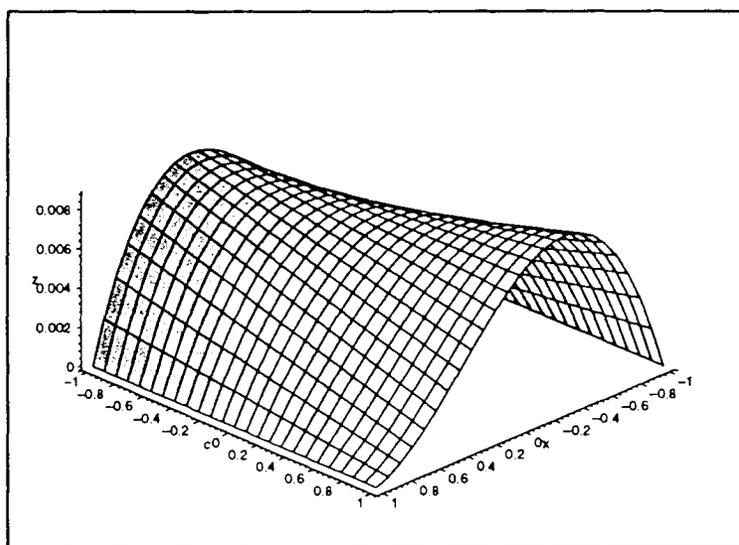
$$\begin{aligned}\text{Pol[int]} &= 2 \left(1 - \frac{M}{2r_0} \right) r \\ \text{Pol[ext]} &= 2r_0 - M\end{aligned}$$

e la $\beta(r)$ diviene

$$\begin{aligned}\beta(r) &= 2r_0 - M - 2 \frac{(-2r_2 - 3r_1 + 5r_0)(-2r_0 + M)(r - r_2)^3}{r_0(r_2 - r_1)^3} \\ &\quad - \frac{(-7r_2 + 15r_0 - 8r_1)(-2r_0 + M)(r - r_2)^4}{r_0(r_2 - r_1)^4}\end{aligned}$$

I grafici per le componenti del tensore di Einstein sono

Figura 4.24 : G_{00} Figura 4.25 : $G_{00} - |G_{11}|$

Figura 4.26 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_m, y_A)

La funzione $\alpha(r)$ in questo caso si ottiene sostituendo

$$\begin{aligned} \text{Pol[int]} &= a_0 r + a_1 \\ \text{Pol[ext]} &= \frac{M}{r_0} r + 2r_0 \end{aligned}$$

dove $a_0 \in \left] 2, 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0} \right) \right[$, ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{2r_0^2 + Mr_2}{r_0} + \frac{M(r - r_2)}{r_0} + \\ &\quad - 2 \frac{(3Mr_1 - 3r_0 a_0 r_1 + 10r_0^2 + 2Mr_2 - 2r_2 r_0 a_0 - 5r_0 a_1)(r - r_2)^3}{r_0 (r_1 - r_2)^3} \\ &\quad + \frac{(8Mr_1 - 8r_0 a_0 r_1 + 7Mr_2 + 30r_0^2 - 15r_0 a_1 - 7r_2 r_0 a_0)(r - r_2)^4}{r_0 (r_1 - r_2)^4} \\ &\quad - 3 \frac{(4r_0^2 - r_0 a_0 r_1 - 2r_0 a_1 + Mr_1 - r_2 r_0 a_0 + Mr_2)(r - r_2)^5}{r_0 (r_1 - r_2)^5} \end{aligned}$$

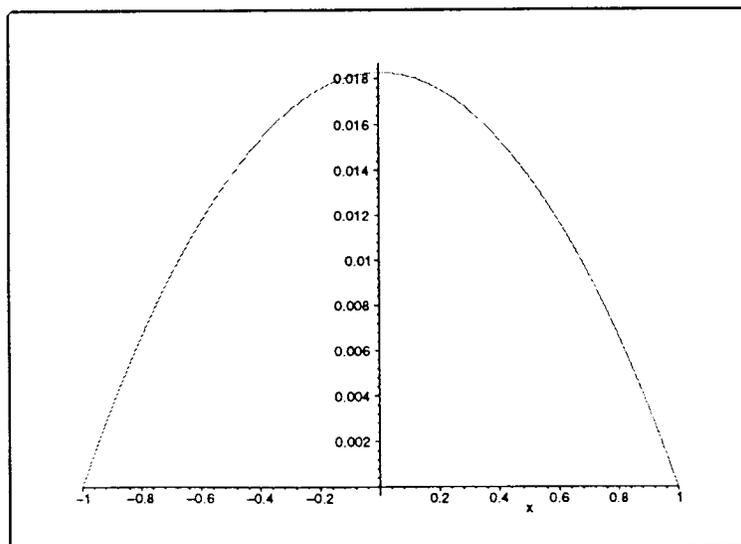
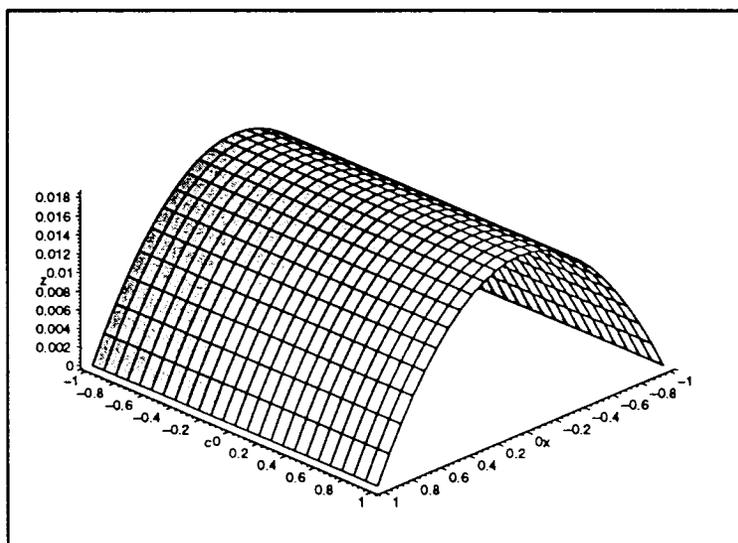
Per la $\beta(r)$ invece si sostituisce

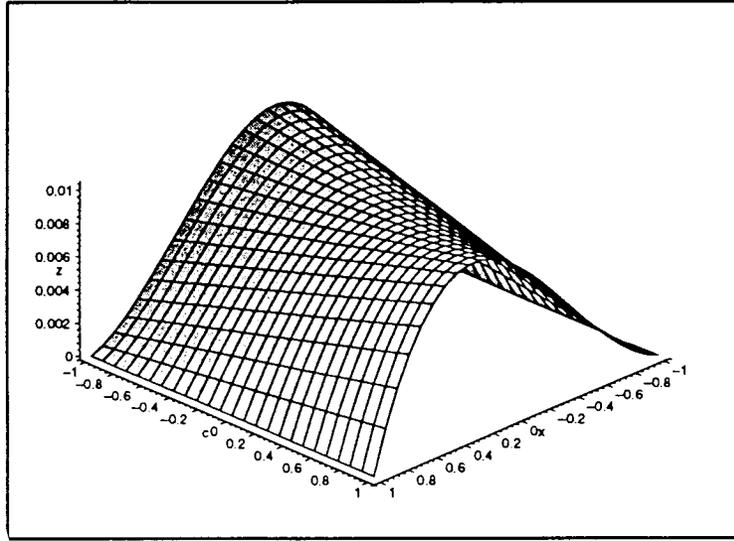
$$\begin{aligned}\text{Pol[int]} &= c(a_0 r + a_1) \\ \text{Pol[ext]} &= \frac{M}{r_0} r - 2r_0 \\ c &= \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}\end{aligned}$$

e si ricava

$$\begin{aligned}\beta(r) &= \frac{2r_0^2 - Mr_2}{r_0} - \frac{M(r - r_2)}{r_0} + \\ &\quad - 2 \frac{(-3Mr_1 - 3r_0ca_0r_1 + 10r_0^2 - 2Mr_2)(r - r_2)^3}{r_0(r_1 - r_2)^3} \\ &\quad + \frac{(-2r_2r_0ca_0 + 5r_0ca_1)(r - r_2)^3}{r_0(r_1 - r_2)^3} + \frac{(-8Mr_1 - 8r_0ca_0r_1)(r - r_2)^4}{r_0(r_1 - r_2)^4} \\ &\quad + \frac{(-7Mr_2 + 30r_0^2 - 15r_0ca_1 - 7r_2r_0a_0)(r - r_2)^4}{r_0(r_1 - r_2)^4} \\ &\quad - 3 \frac{(4r_0^2 - r_0ca_0r_1 + 2r_0ca_1 - Mr_1 - r_2r_0ca_0 - Mr_2)(r - r_2)^5}{r_0(r_1 - r_2)^5}\end{aligned}$$

I grafici per le componenti del tensore di Einstein soddisfano le condizioni sull'energia dominante, come si vede dai grafici

Figura 4.27 : G_{00} Figura 4.28 : $G_{00} - |G_{11}|$


 Figura 4.29 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_m, y_5)

La funzione $\alpha(r)$ si ottiene sostituendo

$$\text{Pol[int]} = a_0 r + a_1$$

$$\text{Pol[ext]} = 2r_0 + M$$

dove $a_0 \in]2, 2 \left(1 + \frac{M}{2r_0}\right)[$ e la $\alpha(r)$ diviene

$$\begin{aligned} \alpha(r) = & 2r_0 + M + 2 \frac{(-2r_2 a_0 + 5M - 3a_0 r_1 - 5a_1 + 10r_0)(r - r_2)^3}{(r_2 - r_1)^3} \\ & + \frac{(-7r_2 a_0 - 8a_0 r_1 - 15a_1 + 30r_0 + 15M)(r - r_2)^4}{(r_2 - r_1)^4} \\ & + 3 \frac{(4r_0 + 2M - 2a_1 - a_0 r_1 - r_2 a_0)(r - r_2)^5}{(r_2 - r_1)^5} \end{aligned}$$

Per la $\beta(r)$ invece si sostituisce

$$\text{Pol[int]} = c(a_0 r + a_1)$$

$$\text{Pol[ext]} = 2r_0 - M$$

$$c = \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}$$

e si ricava

$$\beta(r) = 2r_0 - M + 2 \frac{(-2r_2ca_0 - 5M - 3ca_0r_1 + 5ca_1 + 10r_0)(r - r_2)^3}{(r_2 - r_1)^3} + \frac{(-7r_2ca_0 - 8ca_0r_1 + 15ca_1 + 30r_0 - 15M)(r - r_2)^4}{(r_2 - r_1)^4} + 3 \frac{(4r_0 - 2M + 2ca_1 - ca_0r_1 - r_2ca_0)(r - r_2)^5}{(r_2 - r_1)^5}$$

Le condizioni di energia dominante sono verificate come si vede dai grafici

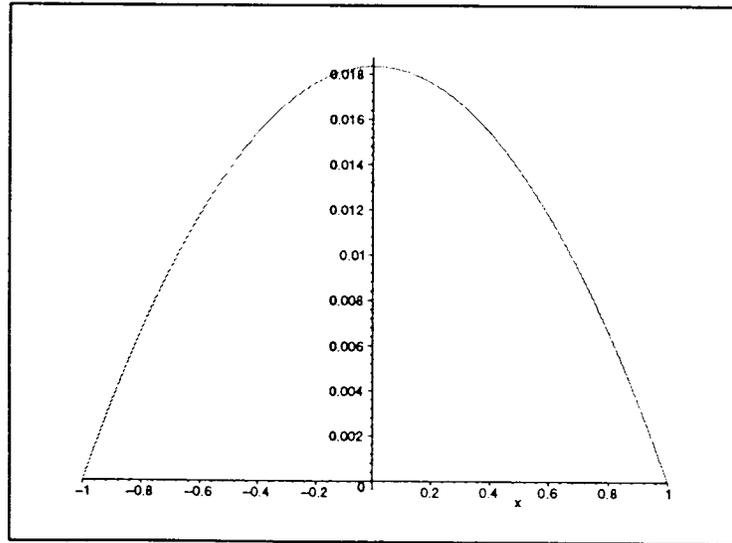
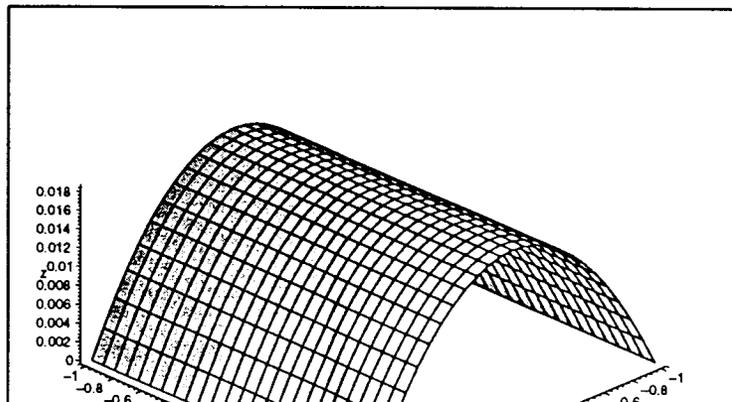
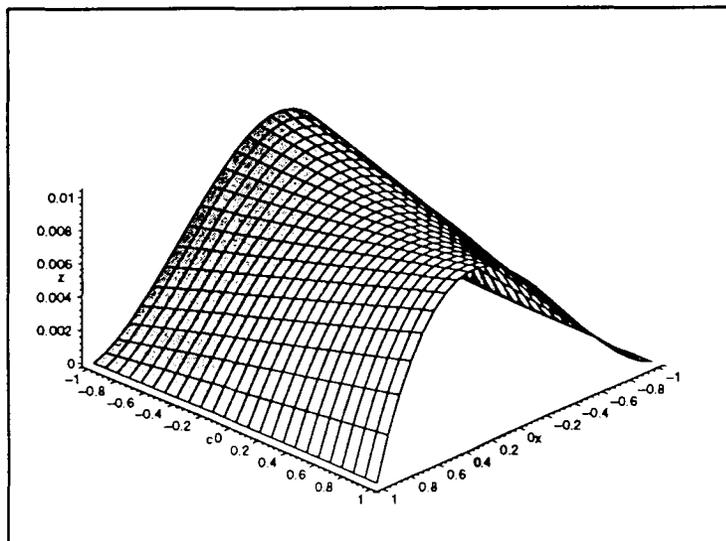


Figura 4.30 : G_{00}




 Figura 4.32 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_2, y_4)

Ci troviamo nella situazione particolare di incollare due metriche di Schwarzschild con la stessa massa. La funzione $\alpha(r)$ in questo caso si ottiene sostituendo

$$\begin{aligned} \text{Pol[int]} &= 2r + M \\ \text{Pol[ext]} &= \frac{M}{r_0}r + 2r_0 \end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{2r_0^2 + Mr_2}{r_0} + \frac{M(r - r_2)}{r_0} \\ &+ 2 \frac{(M - 2r_0)(2r_2 + 3r_1 - 5r_0)(r - r_2)^3}{r_0(r_2 - r_1)^3} \\ &+ \frac{(M - 2r_0)(7r_2 + 8r_1 - 15r_0)(r - r_2)^4}{r_0(r_2 - r_1)^4} \end{aligned}$$

Per la $\beta(r)$ invece si sostituisce

$$\begin{aligned} \text{Pol[int]} &= 2r - M \\ \text{Pol[ext]} &= -\frac{M}{r_0}r + 2r_0 \end{aligned}$$

e si ricava

$$\beta(r) = -\frac{Mr_2 - 2r_0^2}{r_0} - \frac{M(r - r_2)}{r_0} - 2\frac{(2r_0 + M)(2r_2 + 3r_1 - 5r_0)(r - r_2)^3}{r_0(r_2 - r_1)^3} - \frac{(2r_0 + M)(7r_2 + 8r_1 - 15r_0)(r - r_2)^4}{r_0(r_2 - r_1)^4}$$

Le condizioni di energia dominante sono verificate come si vede dai grafici

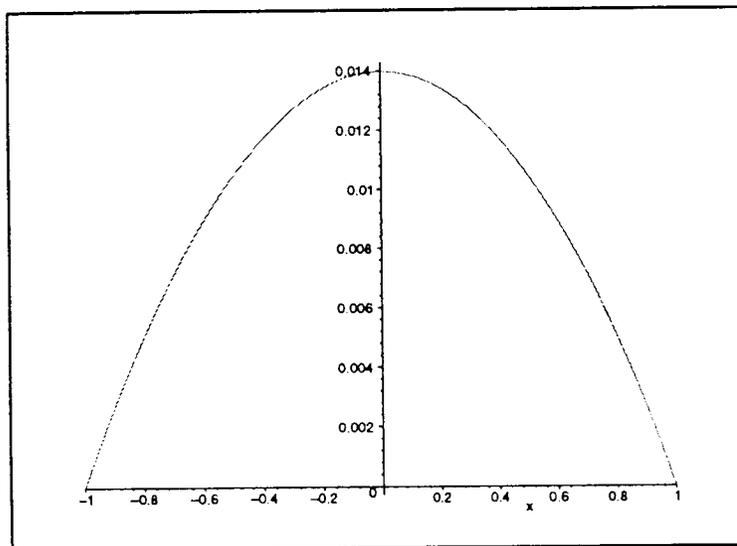


Figura 4.33 : G_{00}

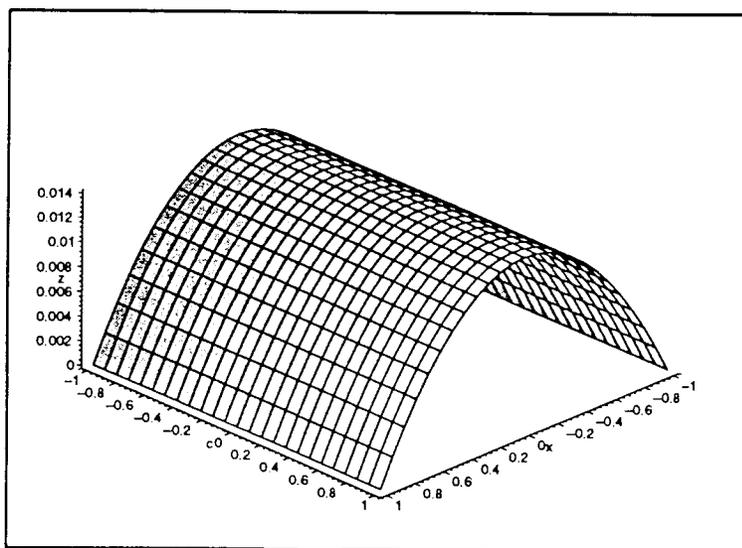


Figura 4.34 : $G_{00} - |G_{11}|$

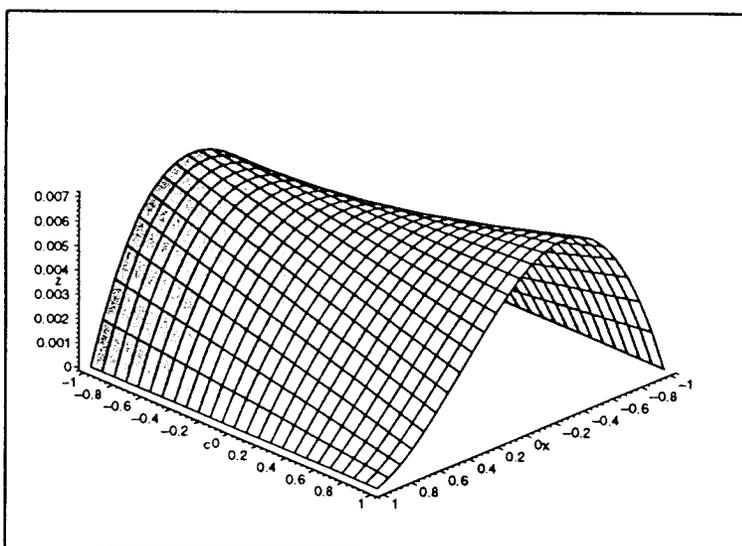


Figura 4.35 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_2, y_{m1})

La funzione $\alpha(r)$ si ottiene sostituendo

$$\text{Pol[int]} = 2r + M$$

$$\text{Pol[ext]} = a_0 r + a_1$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha(r) = & a_0 r_2 + a_1 + a_0 (r - r_2) + \\ & -2 \frac{(3a_0 r_1 - 6r_1 - 4r_2 + 2a_0 r_2 + 5a_1 - 5M) (r - r_2)^3}{(r_1 - r_2)^3} + \\ & + \frac{(8a_0 r_1 - 16r_1 - 14r_2 + 7a_0 r_2 + 15a_1 - 15M) (r - r_2)^4}{(r_1 - r_2)^4} + \\ & -3 \frac{(2a_1 - 2M + a_0 r_1 - 2r_1 + a_0 r_2 - 2r_2) (r - r_2)^5}{(r_1 - r_2)^5} \end{aligned}$$

Per la $\beta(r)$ invece si sostituisce

$$\text{Pol[int]} = 2r - M$$

$$\text{Pol[ext]} = c(a_0 r + a_1)$$

$$c = \frac{2r_0 - M}{a_0 r_0 - a_1}$$

e si ricava

$$\begin{aligned} \beta(r) = & c(a_0 r_2 - a_1) + ca_0 (r - r_2) + \\ & -2 \frac{(-3ca_0 r_1 + 6r_1 + 4r_2 - 2ca_0 r_2 + 5ca_1 - 5M) (r - r_2)^3}{(r_2 - r_1)^3} + \\ & - \frac{(-8ca_0 r_1 + 16r_1 + 14r_2 - 7ca_0 r_2 + 15ca_1 - 15M) (r - r_2)^4}{(r_2 - r_1)^4} + \\ & -3 \frac{(2ca_1 - 2M - ca_0 r_1 + 2r_1 - ca_0 r_2 + 2r_2) (r - r_2)^5}{(r_1 - r_2)^5} \end{aligned}$$

I grafici per le componenti del tensore di Einstein sono i seguenti

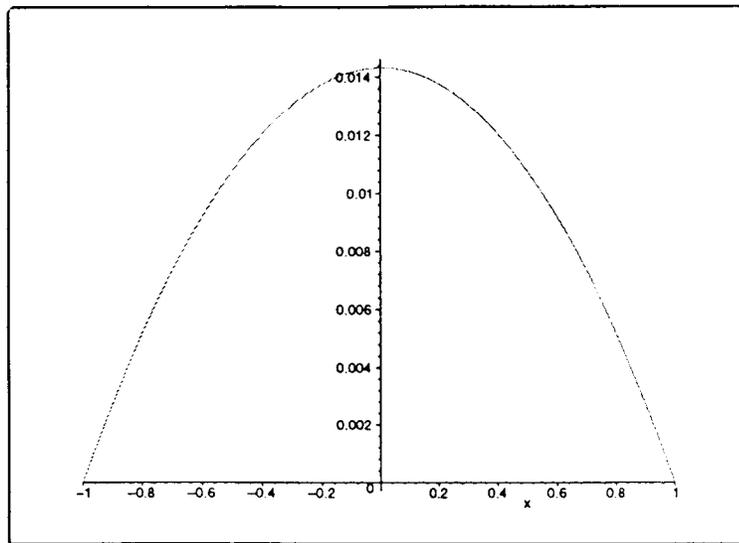


Figura 4.36 : G_{00}

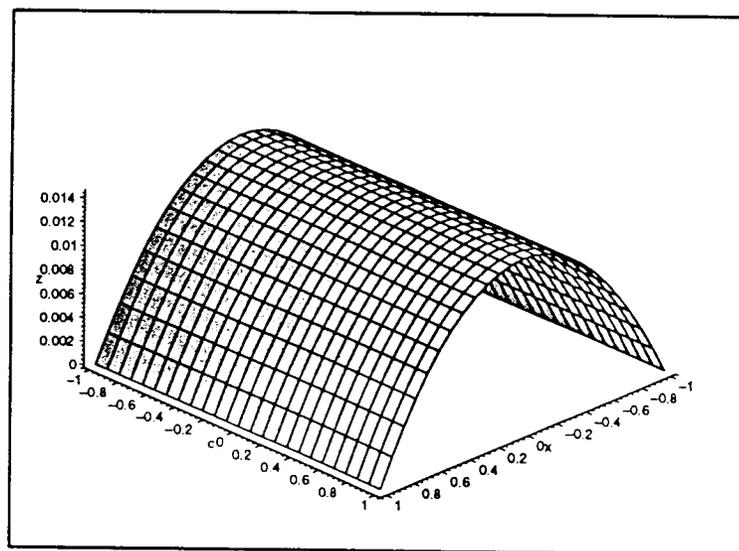
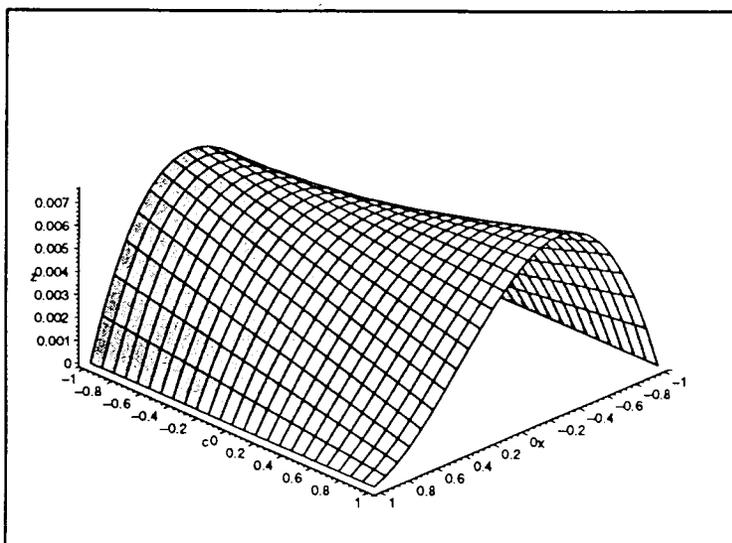


Figura 4.37 : $G_{00} - |G_{11}|$

Figura 4.38 : $G_{00} - |G_{22}|$

caso (y_2, y_5)

La funzione $\alpha(r)$ in questo caso si ottiene sostituendo

$$\text{Pol[int]} = 2r + M$$

$$\text{Pol[ext]} = 2r_0 + M$$

ottenendo

$$\alpha(r) = 2r_0 + M + 4 \frac{(3r_1 - 5r_0 + 2r_2)(r - r_2)^3}{(r_1 - r_2)^3} +$$

$$- 2 \frac{(8r_1 - 15r_0 + 7r_2)(r - r_2)^4}{(r_1 - r_2)^4}$$

Per la $\beta(r)$ invece si sostituisce

$$\text{Pol[int]} = 2r - M$$

$$\text{Pol[ext]} = 2r_0 - M$$

e si ricava

$$\beta(r) = 2r_0 - M + 4 \frac{(3r_1 - 5r_0 + 2r_2)(r - r_2)^3}{(r_1 - r_2)^3} +$$

$$- 2 \frac{(8r_1 - 15r_0 + 7r_2)(r - r_2)^4}{(r_1 - r_2)^4}$$

Le condizioni di energia dominante sono verificate come si vede dai grafici

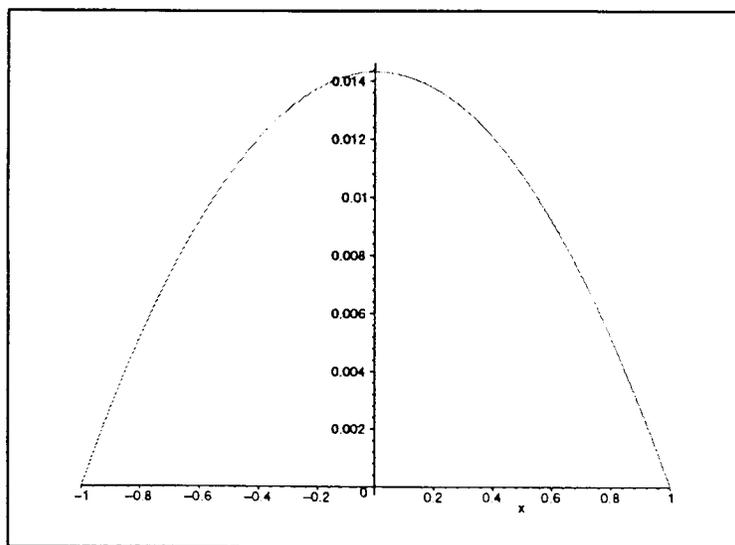


Figura 4.39 : G_{00}

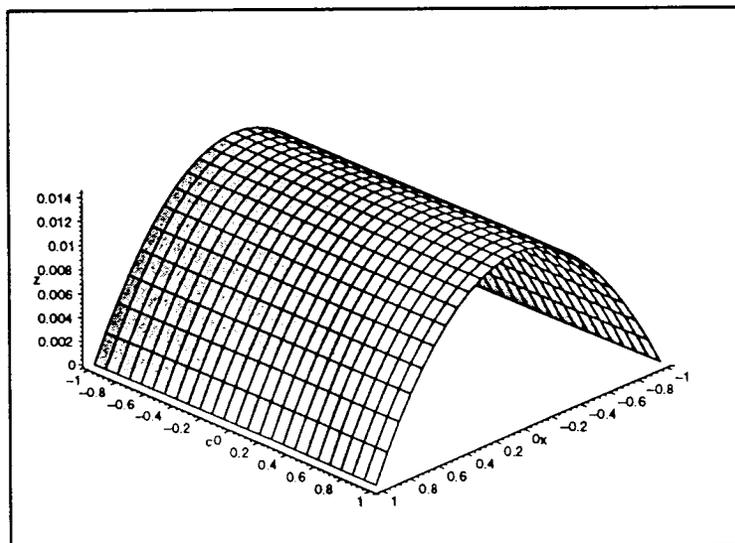
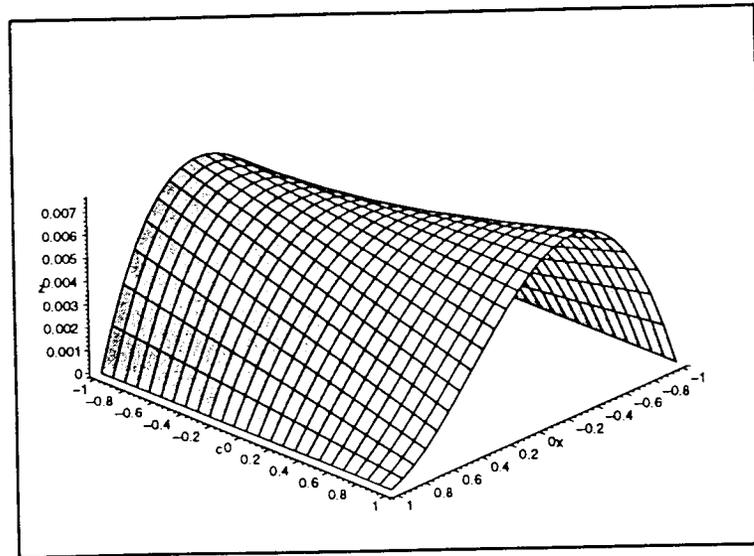


Figura 4.40 : $G_{00} - |G_{11}|$

Figura 4.41 : $G_{00} - |G_{22}|$

4.5 Superfici $t = \text{costante}$

In questo paragrafo visualizziamo gli incollamenti studiati in precedenza con un'immersione isometrica in una varietà euclidea. Possiamo limitarci a studiare le sezioni $\theta = \pi/2$ delle ipersuperfici $t = \text{costante}$ data la simmetria sferica e la staticità del problema considerato. In questo caso la metrica (4.30) assume la forma

$$ds^2 = \left(\frac{a_0\rho + a_1}{2\rho} \right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2] \quad (4.46)$$

e la varietà curva da essa descritta può essere immersa in uno spazio-tempo euclideo quadridimensionale. Consideriamo coordinate cilindriche (z, R, θ, φ) e identifichiamo la coordinata φ della varietà euclidea con la φ della ipersuperficie $t = \text{costante}$. Non possiamo fare la stessa cosa per R e ρ , perché quest'ultimo non è la coordinata radiale effettiva, ma dobbiamo imporre

$$R(\rho) = \rho \left(\frac{a_0\rho + a_1}{2\rho} \right)^2 \quad (4.47)$$

Il raggio R inoltre è una funzione crescente di ρ per

$$\rho > \frac{a_1}{a_0} \quad (4.48)$$

Per quanto riguarda infine la coordinata z , richiederemo che non dipenda da φ e da θ ma soltanto da R :

$$z = z(R)$$

Con queste considerazioni la metrica euclidea è

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2 = \\ &= \left[1 + \left(\frac{dz(R)}{dR} \right)^2 \right] dR^2 + R^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Identifichiamo ora la (4.46) e la (4.49) :

$$\left[1 + \left(\frac{dz(R)}{dR} \right)^2 \right] dR^2 = \left(\frac{a_0\rho + a_1}{2\rho} \right)^4 d\rho^2 \quad (4.50)$$

Esprimendo R in funzione di r nella (4.50) si ha

$$dz = \pm \sqrt{\frac{a_0 a_1}{\rho^3}} (a_0 \rho + a_1) d\rho \quad (4.51)$$

ed integrando fra r_0 ed r , otteniamo

$$z_1 = \sqrt{\frac{a_0 a_1}{\rho}} (a_0 \rho - a_1) - \sqrt{\frac{a_0 a_1}{r_0}} (a_0 r_0 - a_1) \quad (4.52a)$$

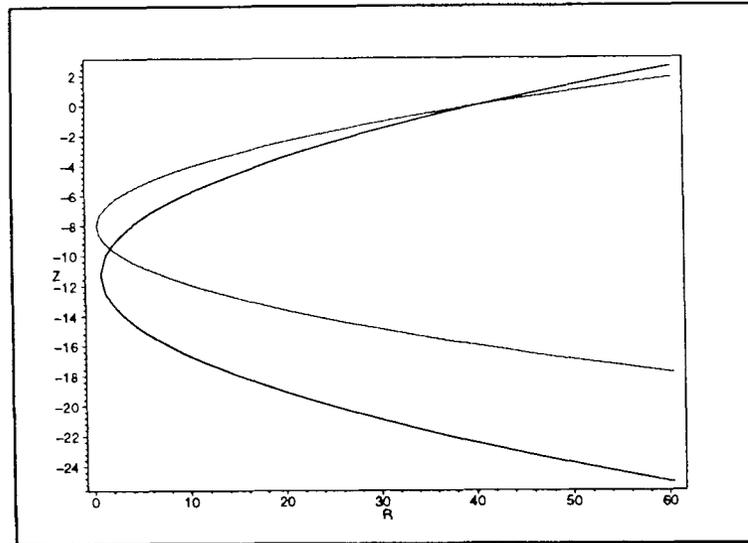
$$z_2 = -\sqrt{\frac{a_0 a_1}{\rho}} (a_0 \rho - a_1) - \sqrt{\frac{a_0 a_1}{r_0}} (a_0 r_0 - a_1) \quad (4.52b)$$

Le (4.52a) - (4.52b) sono valide solo per $\rho \geq a_1/a_0$.
Passiamo ora a considerare i vari incollamenti.

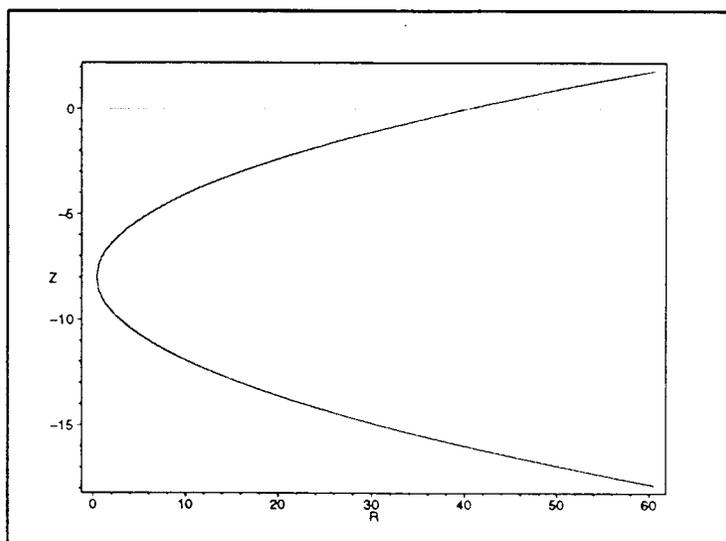
Incollamenti fra metriche relative ad A_1

Non vi sono particolari problemi in questi casi, perché il raggio r_0 , dove avviene la saldatura, si trova all'interno della regione (4.48) ed il passaggio dalla ipersuperficie interna a quella esterna è facilmente visibile.

caso (y_m, y_2)



caso (y_1, y_m)



Incollamenti misti

Ora invece dobbiamo considerare anche le superfici $t = \text{costante}$ corrispondenti a metriche dell'intervallo A_2 . In questi casi r_0 è all'esterno della (4.48) e si trova quindi in una regione dove il raggio effettivo R è una funzione decrescente di ρ . Per superare la difficoltà applichiamo alla trasformazione (4.39) alle superfici (4.52a) - (4.52b), scambiando l'interno con l'esterno.

Integrando la (4.51) fra r_0 ed ρ , ma cambiando variabile secondo la (4.39), otteniamo

$$z(r) = \pm \int_{\rho}^{r_0} \sqrt{\frac{a_0 a_1}{r^3}} \left(a_0 r_0 + \frac{a_1}{r_0} r \right) dr \quad (4.53)$$

che calcolato porta a

$$z_3 = -\sqrt{\frac{a_0 a_1}{\rho}} \left(\frac{a_1}{r_0} \rho - a_0 r_0 \right) + \sqrt{\frac{a_0 a_1}{r_0}} (a_0 r_0 - a_0 r_0) \quad (4.54a)$$

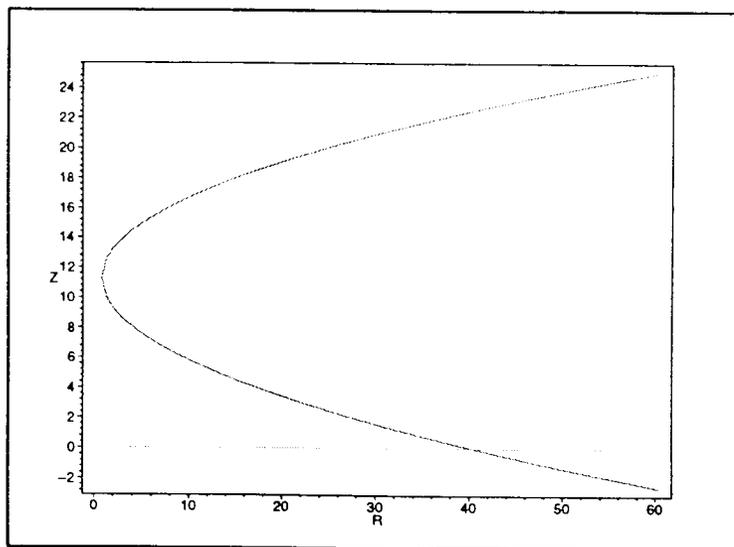
$$z_4 = \sqrt{\frac{a_0 a_1}{\rho}} \left(\frac{a_1}{r_0} \rho - a_0 r_0 \right) + \sqrt{\frac{a_0 a_1}{r_0}} (a_0 r_0 - a_0 r_0) \quad (4.54b)$$

dove a_0 - e quindi anche a_1 - sono relative all'intervallo A_1 .

Per interpretare correttamente i grafici che seguono, è necessario tenere in considerazione la trasformazione (4.39) compiuta sugli spazi-tempo di A_2 . È facile allora constatare che giungendo su r_0 dalla superficie $t = \text{costante}$ interna, dovremo proseguire su quella esterna nella direzione delle R decrescenti.

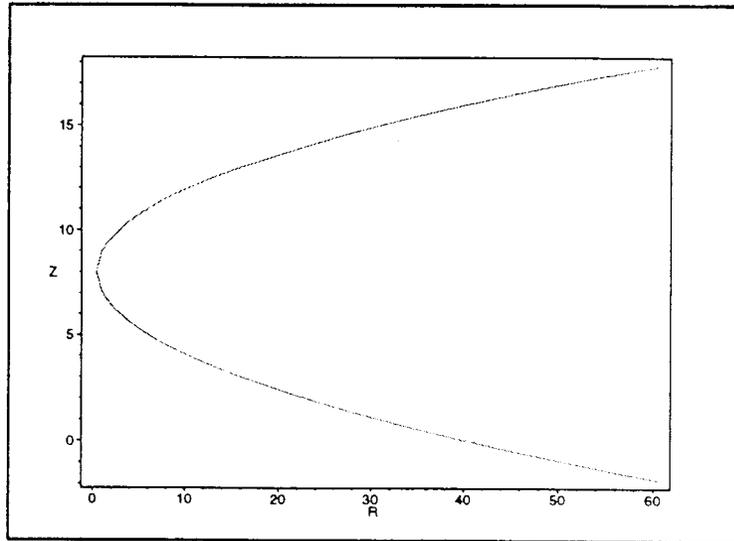
Prendiamo ora in considerazione i vari casi.

caso (y_1, y_4)

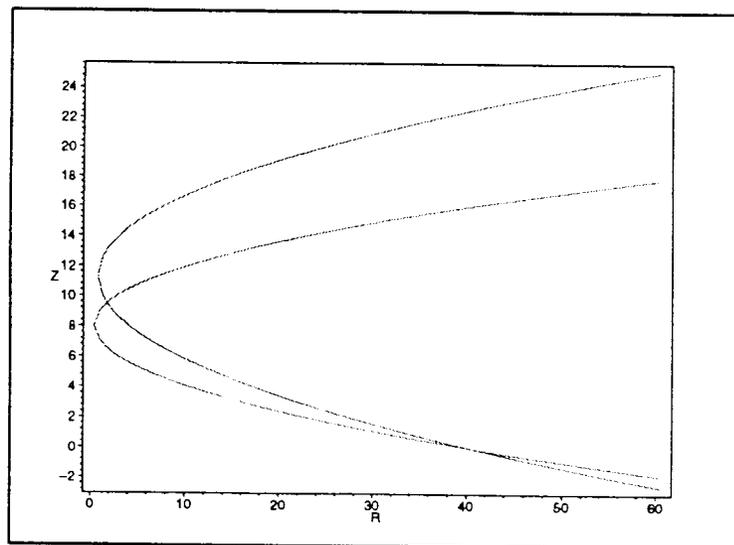


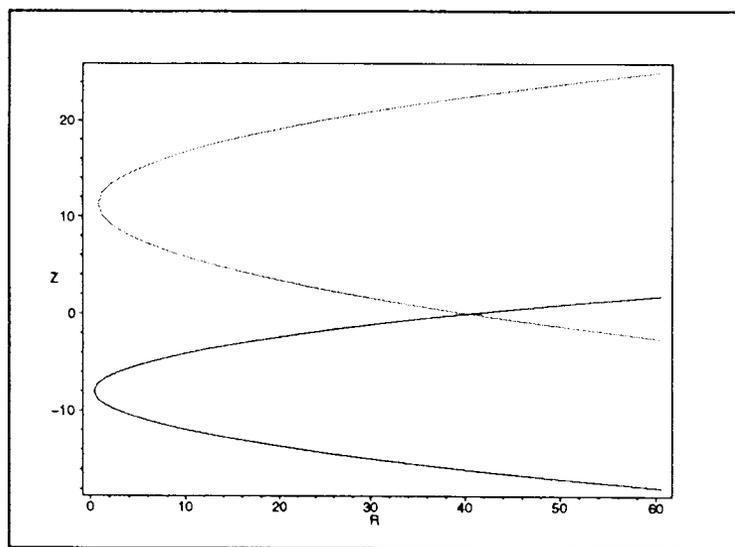
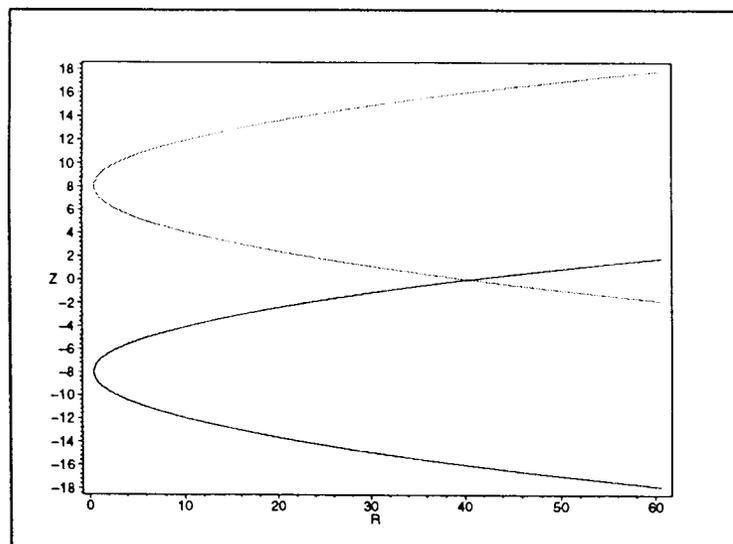
4.5. SUPERFICI $T = \text{COSTANTE}$

caso (y_1, y_{m1})



caso (y_4, y_{m1})

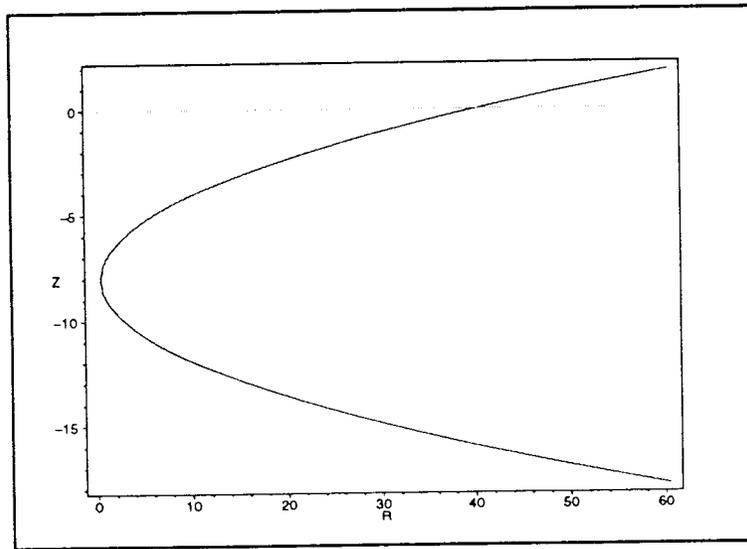


caso (y_m, y_4) caso (y_m, y_{m1}) 

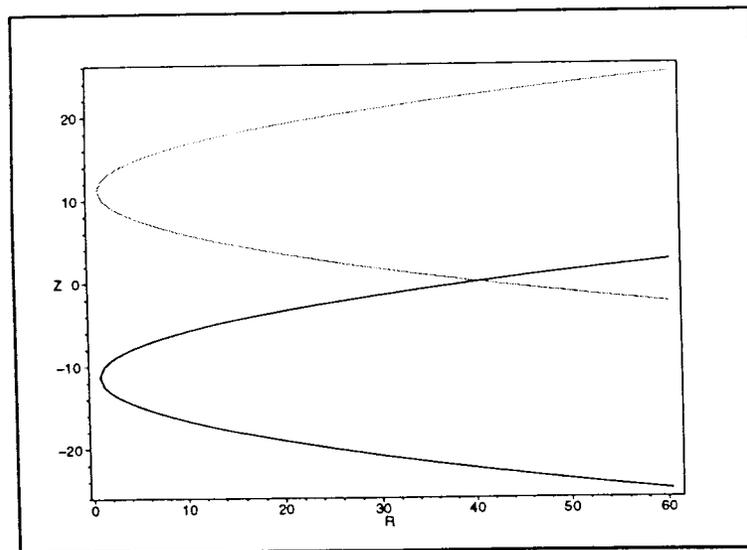
4.5. SUPERFICI $T = \text{COSTANTE}$

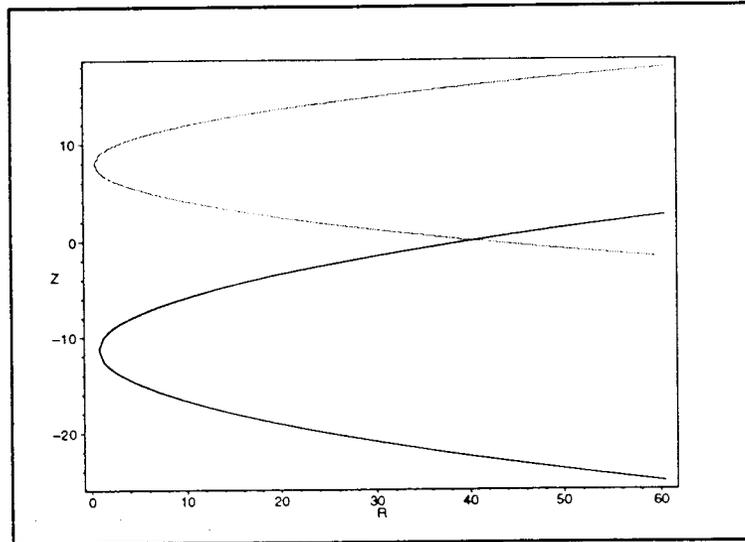
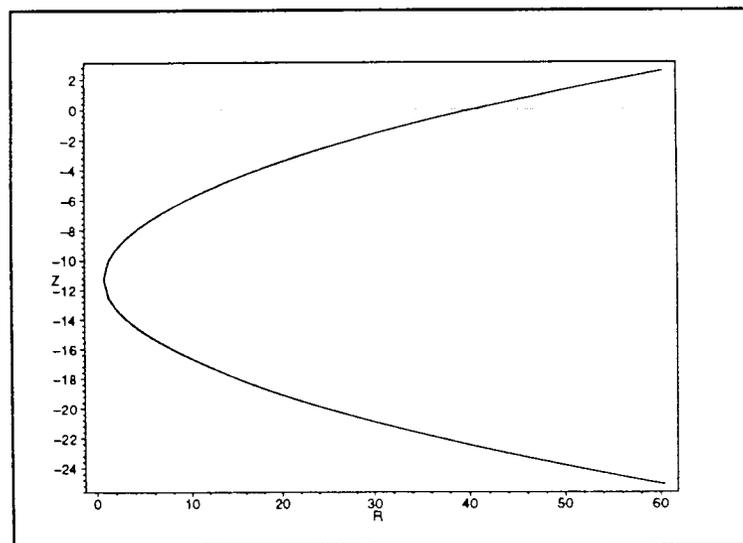
117

caso (y_m, y_5)



caso (y_2, y_4)



caso (y_2, y_{m1}) caso (y_2, y_5) 

Bibliografia

- [1] Darmois, M.G. (1927). *Memorial des Sciences Mathématiques*, n. **25**
- [2] Char, B.W. , Geddes, K.O. , Gonnet, G.H. , Monagan, M.B. , Watt, S.M. (1990). *First Leaves: a Tutorial Introduction to Maple* (Waterloo Maple Publishing, Waterloo)
- [3] Char, B.W. , Geddes, K.O. , Gonnet, G.H. , Leong, M.B. , Monagan, M.B. , Watt, S.M. (1991). *Maple V Library Reference Manual* (Springer Verlag, Berlin)
- [4] Dautcourt, G. (1963). *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, **13**, 55
- [5] Dray, T. , Clarke, C.J.S. (1987). *Classical Quantum Gravity*, **4**, 265.
- [6] Edelen, D.G.B. , Thomas, T.Y. (1963). *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **7**, 247
- [7] Ferraris, M. , Francaviglia, M. , Spallicci, A. (1994). In submission to *Physical Review*
- [8] Ferraris, M. (1992). In *Proceedings of the X Italian Conference on General Relativity and Gravitational Physics, Bardonecchia (Italy)*.
- [9] Goldwirth, D. , Katz, J. (1994) gr-qc/9408034 v3
- [10] Hawking, S.W. , Ellis, G.F.R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge).
- [11] Israel, W. (1958). *Proceedings of the Royal Society*, **A 248**, 404.
- [12] Israel, W. (1966). *Il nuovo Cimento*, vol. **44.B** n. **1**, serie **10**.

- [13] Israel, W. (1967). *Physical Review*, **153** n.5, 1388
- [14] Israel, W. , Barrabes, C. (1991). *Physical Review*, vol.**43** n.4, 1129
- [15] Kramer, Stephani, Herlt, MacCallum (1980). *Exact Solution of Einstein's field equations* (Schmutzer)
- [16] Lanczos, K. (1924). *Annalen der Physik*, **74**, 518
- [17] Lichnerowicz, A. (1955). *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme* (Masson & Cie), 59.
- [18] Misner, C.W. , Sharp D.H. (1964). *Physical Review*, vol. **136** n. **2B**, 571.
- [19] Misner, Thorne, Wheeler (1973). *Gravitation* (Freeman and Company).
- [20] Nariai, H. (1965). *Progress of Theoretical Physics*, vol. **34** n. **1**, 173.
- [21] Oppenheimer, J.R. , Volkoff, G.M. (1939). *Physical Review*, vol. **55**, 374
- [22] Sakai, N. , Maeda, K. (1994). *Physical Review*, **50** n.8, 5425
- [23] Sato, H. (1986). *Progress of Theoretical Physics*, vol. **76** n. **6**, 1250.
- [24] Synge, J.L. (1960). *Relativity: the General Theory* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam).
- [25] Weimberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & sons)