Capitolo 3

Il PROBLEMA DEL RACCORDO

La Relatività Generale studia le proprietà di una varietà quadridimensionale descritta da una metrica g a dieci componenti. In fisica il problema della continuità di g non è mai affrontato; di solito si lavora ammettendo che la metrica sia infinitamente differenziabile, sapendo in ogni caso che deve essere di classe C^2 per garantire la continuità del tensore di curvatura.

La natura però mostra bruschi cambiamenti come nel passaggio dalla materia al vuoto. In questi casi abbiamo che la regione interna è caratterizzata da un tensore energia-momento con componenti diverse da zero (potrebbe essere ad esempio un fluido perfetto) , mentre la regione esterna, corrispondente al vuoto, ha un tensore energia-momento nullo. Ricordando le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

il brusco cambiamento di $T_{\mu\nu}$ nel passaggio dalla materia al vuoto implica una discontinuità nelle derivate seconde della metrica.
Questo esempio ci suggerisce che all'interno dello spazio-tempo esistono delle superfici di discontinuità della metrica.[17][24] Possiamo così assumere che lo spazio-tempo sia ricoperto da un'insieme di carte su cui g è di classe C^2 , ma al cui interno si trovano delle superfici di discontinuità che limitano g ad essere globalmente di classe C o C^1.

La continuità della metrica è legata anche all'insieme di coordinate utilizzate. Infatti se abbiamo due carte[1] $(A\ ,\ x^{\mu})$ in cui è definita g e $(B\ ,\ y^{\nu})$ in cui si ha g', il passaggio da una metrica all'altra è dato da

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial y^{\nu}} \tag{3.1}$$

dove sono coinvolti gli jacobiani della trasformazione.
Per garantire che in entrambi gli aperti la metrica sia continua con le sue derivate seconde, dovremo utilizzare delle coordinate legate da trasformazioni di classe C^3. Nel caso in cui l'intersezione dei due aperti $A \cap B$ contenga una superficie di discontinuità per le derivate seconde, è opportuno definire il sistema di coordinate *ammissibile*. In esso la metrica sarà di classe C^1 e una trasformazione che lega due sistemi ammissibili dovrà essere di classe C^2.

3.1 Cenni di geometria delle sottovarietà

Consideriamo una varietà M quadridimensionale, descritta da una metrica

$$g = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{3.2}$$

dove $\mu\ ,\ \nu = 0...3$, ed una ipersuperficie Σ le cui equazioni parametriche sono

$$x^{\alpha} = f^{\alpha}\left(\xi^{i}\right) \tag{3.3}$$

dove $\left\{\xi^{i}\right\}$ sono le coordinate su Σ e l'indice latino $i = 1...3$.
I vettori tangenti a Σ hanno componenti

$$e^{\alpha}_{(i)} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{i}} \tag{3.4}$$

e permettono di costruire una metrica intrinseca a Σ

$$h = h_{ab}d\xi^{a}d\xi^{b} \tag{3.5}$$

dove

$$h_{ab} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{a}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{b}} = g_{\mu\nu}e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(b)} \tag{3.6}$$

[1] $A \in M\ ,\ B \in M$ tale che la loro intersezione $A \cap B \neq 0$

L'ipersuperficie viene inoltre classificata una volta introdotto il vettore normale $\vec{n}$ a Σ :

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = \begin{cases} 0 \\ \varepsilon \end{cases} \tag{3.7}$$

dove $\varepsilon = \pm\, 1$. La Σ è di tipo *tempo* se $\varepsilon = +1$, di tipo *spazio* se $\varepsilon = -1$ ed infine di tipo *luce* se il vettore $\vec{n}$ è tangente alla ipersuperficie.
Possiamo considerare come base della varietà M l'insieme dei vettori $\left\{\vec{e}_{(i)}\ ,\ \vec{n} = \vec{e}_0\right\}$.

Un concetto fondamentale della geometria delle sottovarietà è la *curvatura esterna*, definita come

$$^4\nabla_i \vec{n} = K_i^j \vec{e}_j \tag{3.8}$$

dove l'indice 4 sta ad indicare che la derivata covariante è fatta rispetto alla metrica g. La curvatura esterna è un tensore definito su Σ e descrive l'immersione di quest'ultima nella varietà M. É facile mostrare che K_j^i è simmetrico :

$$\begin{aligned} K_{ij} &= K_i^m h_{mj} = K_i^m \left(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_j\right) = {}^4\nabla_i \vec{n} \cdot \vec{e}_j = \\ &= -\vec{n} \cdot {}^4\nabla_i \vec{e}_j = -\vec{n} \cdot {}^4\nabla_j \vec{e}_i = K_{ji} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sfruttando la (3.9) si calcoli

$$^4\nabla_i \vec{e}_j = {}^4\Gamma^{\mu}_{ij}\, \vec{e}_\mu = {}^3\Gamma^m_{ij}\, \vec{e}_m - \varepsilon\, \vec{n} K_{ij} \tag{3.10}$$

dove ${}^3\Gamma^m_{ij}$ sono i coefficienti di connessione della geometria di Σ. La (3.10) prende il nome di equazione di *Gauss-Weingarten* e mostra come un vettore tangente alla ipersuperficie viene trasportato parallelamente in riferimento alla geometria esterna.
Esprimiamo ora il tensore di curvatura definito in M attraverso quello intrinseco alla Σ e alla curvatura esterna. Per la (**??**) si ha

$$R\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) \vec{w} = {}^4\nabla_{\vec{u}}\, {}^4\nabla_{\vec{v}}\ \vec{w} - {}^4\nabla_{\vec{v}}\, {}^4\nabla_{\vec{u}}\ \vec{w} - {}^4\nabla_{[\vec{u},\vec{v}]}\ \vec{w}$$

e scegliendo al posto dei tre vettori $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la terna dei vettori tangenti a Σ $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ si ha

$$R\left(\vec{e}_j, \vec{e}_k\right) \vec{e}_i = {}^4\nabla_j\, {}^4\nabla_k\ \vec{e}_i - {}^4\nabla_k\, {}^4\nabla_j\ \vec{e}_i \tag{3.11}$$

Utilizzando le (3.9) (3.10) si riesce a calcolare la (3.11) che espressa in componenti si scrive come

$$
\begin{aligned}
{}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e^{\alpha}_{(m)}e^{\beta}_{(i)}e^{\gamma}_{(j)}e^{\delta}_{(k)} &= \left(K_{ik}K_{mj} - K_{ij}K_{mk}\right) + {}^3R_{mijk} && (3.12a)\\
{}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, n^{\alpha}e^{\beta}_{(i)}e^{\gamma}_{(j)}e^{\delta}_{(k)} &= \left(K_{ij\,|k} - K_{ik\,|\,j}\right) && (3.12b)
\end{aligned}
$$

dove la riga verticale $|$ sta ad indicare la dericata covariante sulla sootovarietà Σ.
Le (3.12a) e (3.12b) prendono il nome di equazioni di *Gauss-Codazzi.*
Agendo su queste ultime con al metrica di Σ e ricordando che

$$
h^{ab}\, e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(b)} = g^{\mu\nu} - \varepsilon\, n^{\mu}n^{\nu} \tag{3.13}
$$

si ricava

$$
\begin{aligned}
-2\varepsilon G_{\alpha\beta}\, n^{\alpha}n^{\beta} &= {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 && (3.14a)\\
G_{\alpha\beta}\, e^{\alpha}_{(i)}n^{\beta} &= K^{j}_{i\,|\,j} - K_{|\,i} && (3.14b)
\end{aligned}
$$

3.1.1 Coordinate normali di Gauss

Di particolare interesse per lo studio delle sottovarietà sono le coordinate gaussiane. Consideriamo un campo vettoriale $U^{\alpha}\left(\xi^{i}\right)$ definito sulla superficie Σ. Tracciamo ora la geodetica $\left\{\gamma_p\left(\lambda\right)\right\}$ che passa per il punto $P \in \Sigma$ per $\lambda = 0$ e che ha come vettori tangenti gli $U^{\alpha}\left(\xi^{i}\right)$. Sia ora B un punto esterno alla ipersuperfice posto però in un intorno di Σ. Il punto B sarà individuato dalle coordinate gaussiane $x^{\rho} = \left\{\xi^{j}_{p}\,,\,\lambda\right\}$ dove ξ^{j}_{p} sono le coordinate di P sulla superfice. In particolare se i vettori $U^{\alpha}\left(\xi^{i}\right)$ sono ortogonali a Σ, l'insieme $\{x^{\rho}\}$ prende il nome di *coordinate normali gaussiane.*
La metrica in questo sistema di coordinate assume una forma particolare:

$$
ds^2 = \varepsilon\, d\lambda^2 + g_{ij}\left(\xi, \lambda = 0\right) d\xi^{i}d\xi^{j} \tag{3.15}
$$

dove λ è la coordinata che mi dà la distanza di un punto esterno a Σ. Si noti che sulla ipersuperficie abbiamo

$$
{}^4g_{ij}\left(\xi, \lambda = 0\right) = h_{ij}\left(\xi\right)
$$

Anche la curvatura esterna K_{ij} assume una forma particolarmente semplice[2]:

$$K_{ij} = \nabla_i \vec{n} = \frac{1}{2} \partial_0 {}^4 g_{ij} \tag{3.15}$$

e ci permette di calcolare le seguenti equazioni per le coordinate normali di Gauss:

$$\begin{aligned}
{}^4R_{ij} &= {}^3R_{ij} + \varepsilon\, \partial_0 K_{ij} + \varepsilon\, K\, K_{ij} - 2\varepsilon\, K_i^t K_{jt} && (3.16a)\\
{}^4R_{i0} &= -\left[K^k_{i\,|\,k} - K_{|\,i}\right] && (3.16b)\\
{}^4R_{00} &= h^{ij} \partial_0 K_{ij} - K^j_k K^k_j && (3.16c)
\end{aligned}$$

Lo scalare di curvatura è

$${}^4R = {}^3R + \varepsilon \left[K^2 - 3K^j_k K^k_j + 2h^{ij} \partial_0 K_{ij}\right] \tag{3.17}$$

Il tensore di Einstein invece diventa

$$\begin{aligned}
{}^4G_{ij} &= {}^3G_{ij} + \varepsilon\, \partial_0 K_{ij} + \varepsilon\, K K_{ij} - 2\varepsilon\, K_i^t K_{jt} - \frac{1}{2}\varepsilon\, h_{ij} K^2 && (3.18a)\\
&\quad + \frac{3}{2}\varepsilon\, K_{ik} K^k_j - \varepsilon\, h_{ij} g^{mn} \partial_0 K_{mn} && (3.18b)\\
{}^4G_{i0} &= {}^4R_{i0} && (3.18c)\\
{}^4G_{00} &= -\frac{1}{2}\varepsilon\, {}^3R - \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2} K^j_k K^k_j && (3.18d)
\end{aligned}$$

3.2 Boundary Surfaces

Come abbiamo già visto nella parte introduttiva di questo capitolo, lo spaziotempo è una varietà ricoperta da un insieme di carte in cui la metrica è di classe C^2. Possono esistere però delle superfici di discontinuità del tensore metrico che limitano g ad essere globalmente di classe C o di classe C^1.
Consideriamo per ora il secondo caso ed ammettiamo che la metrica sia continua con le sue derivate prime attraverso Σ. La Σ è una *ipersuperficie singolare di ordine superiore al primo* o *boundary-surface*.[17][6][20][13] Avevamo anche introdotto la definizione di sistema di coordinate ammissibile come

[2] D'ora in avanti ometteremo l'indice 4 nel simbolo della derivata covariante quadridimensionale. La derivata covariante sulla sottovarietà Σ sarà sempre indicata con $|$.

quel sistema in cui la metrica è di classe C^1. Per non lasciare il discorso ad un livello astratto, è opportuno mostrare che un tale sistema di riferimento esiste.

Teorema 13 *Le coordinate normali di Gauss sono un sistema di coordinate ammissibile e garantiscono la continuità della metrica e delle sue derivate prime attraverso a Σ.*

Per la dimostrazione supponiamo che Σ sia individuata dall'equazione

$$x'^0 = 0 \tag{3.19}$$

dove $x'^0 \in \{x'^\mu\}_{\mu=0\ldots3}$ che è un sistema di coordinate ammissibile.
Siano ora $\{x^\mu\}$ delle coordinate normali di Gauss tali che su Σ sia $x^i = x'^i$, con $i = 1..3$. Indichiamo con A la matrice di trasformazione fra i due sistemi di coordinate

$$x'^\mu = A^\mu_\nu \, x^\nu \tag{3.20}$$

dove $A^i_j|_\Sigma = \delta^i_j$ e $A^0_j|_\Sigma = 0$.
Inoltre per le usuali leggi di trasformazione dei tensori si ha

$$g'_{\mu\nu} \, A^\mu_0 \, A^\nu_0 = g_{00} = \varepsilon \tag{3.21}$$

dove g' è la metrica in $\{x'^\mu\}$ e g invece è il tensore metrico in coordinate normali di Gauss. Dalla (3.21) si deduce che A^μ_0 e A^ν_0 sono uguali alle componenti del vettore tangente alle geodetiche perpendicolari a Σ :

$$A^\mu_0 = t'^\mu \qquad\qquad A^\mu_0|_\Sigma = n'^\mu \tag{3.22}$$

A^μ_0 dunque non presenta discontinuità perché il vettore normale è definito su tutta la superficie Σ. I coefficienti A^μ_ν sono continui su Σ e questo è sufficiente per garantire la continuità della metrica g; infatti vale

$$g_{\mu\nu} = g'_{\rho\sigma} \, A^\rho_\mu \, A^\sigma_\nu \tag{3.23}$$

ma tutti i termini a secondo membro sono continui.
Restano da considerare le derivate prime . Deriviamo la (3.23) :

$$\partial_\alpha \, g_{\mu\nu} = \left(\partial_\alpha \, A^\rho_\mu\right) \, A^\sigma_\nu \, g'_{\rho\sigma} + A^\rho_\mu \left(\partial_\alpha \, A^\sigma_\nu\right) \, g'_{\rho\sigma} + A^\rho_\mu \, A^\sigma_\nu \, \partial_\alpha \, g'_{\rho\sigma}$$

Le uniche quantità che possono creare dei problemi sono le $\partial_0 A_0^\mu$, in quanto le $\partial_\alpha g'_{\rho\sigma}$ sono continue per ipotesi e le altre componenti sono tutte tangenti a Σ. Il vettore $A_0^\mu = t'^\mu$ è tangente alle geodetiche normali alla ipersuperficie, quindi

$$\frac{dt'^\mu}{ds} + \Gamma'^\mu_{\rho\sigma}\, t'^\rho\, t'^\sigma = 0$$

il che implica la continuità di dt'^μ/ds , essendo continue per ipotesi le $\Gamma'^\mu_{\rho\sigma}$. Ma vale

$$\frac{dt'^\mu}{ds} = \frac{dA_0^\mu}{ds} = \partial_\nu\, A_0^\mu\, \frac{dx^\nu}{ds} = \partial_0\, A_0^\mu \frac{dx^0}{ds} \tag{3.25}$$

che assicura la continuità di $\partial_0\, A_0^\mu$ (c.v.d).
Rimane ora da calcolare la condizione di raccordo per i tensori che hanno una qualche importanza in Relatività Generale. Prima di proseguire diamo alcune notazioni : indichiamo con M^+ la regione esterna a Σ e con M^- quella interna. Analogamente sarà $f^+ \equiv f\,|_{M^+}$ e $f^- \equiv f\,|_{M^-}$ per ciascuna funzione f. Definiamo infine con

$$[\, f\,] = \lim_{\varepsilon \to 0}\, (f\,|_{\Sigma+\varepsilon} - f\,|_{\Sigma-\varepsilon}) \tag{3.26}$$

il salto che registra la funzione f nel passaggio attraverso a Σ.
In coordinate normali di Gauss – ed in generale in qualunque sistema di coordinate ammissibile – avremo l'importante condizione[12]

$$[K_{ij}] = 0 \tag{3.27}$$

perché $g \in C^1$.
La (3.27) caratterizza tutte le superfici singolari di ordine superiore al primo. Calcolando le (3.17a) - (3.17c)per M^+ ed M^- e tenendo conto della (3.27) si ricava

$$\begin{aligned} [R_{ij}] &= [\partial_0\, K_{ij}] && (3.28\text{a}) \\ [R_{i0}] &= 0 && (3.28\text{b}) \\ [R_{00}] &= \varepsilon\, [\partial_0\, K_{ij}]\, h^{ij} && (3.28\text{c}) \end{aligned}$$

che mostrano come le discontinuità delle derivate seconde della metrica siano presenti solo in $\partial_0\, K_{ij}$ e quindi solo in $\partial_0^2\, g_{ij}$.

Dalle (3.18a) - (3.18d) si ottiene in maniera del tutto analoga che il salto del tensore di Einstein attraverso a Σ è:

$$\begin{aligned} [G_{ij}] &= [\partial_0 K_{ij}] - g_{ij}\, g^{mn}\, [\partial_0 K_{mn}] && (3.28) \\ [G_{i0}] &= 0 && (3.29) \\ [G_{00}] &= 0 && (3.30) \end{aligned}$$

3.2.1 Condizioni di Darmois e di Israel

Un caso particolarmente interessante è quando la varietà esterna M^+ corrisponde ad uno spazio vuoto con $T^{\mu\nu} = 0$, mentre all'interno viè della materia.[1][11] Esternamente vale l'equazione

$$R^+_{\mu\nu} = 0 \qquad (3.31)$$

Per garantire che Σ sia una superficie di separazione fra due geometrie diverse, in M^- non si dovrà avere $R^-_{\mu\nu} = 0$. La (3.27b) in particolare ci dice che il tensore R_{i0} è continuo attraverso Σ e quindi dovremo richiedere coerenza fra la ipersuperficie e la regione esterna, ovvero

$$R_{i0}|_\Sigma = 0 \qquad\qquad R_{i0} \in C_\Sigma \qquad (3.32)$$

dove C_Σ indica la continuità su Σ.
Un discorso analogo si può fare per $G_{\mu\nu}$. Il tensore di Einstein all'esterno è nullo :

$$G^+_{\mu\nu} = 0 \qquad (3.33)$$

mentre all'interno dovrà essere complessivamente diverso da zero. Le (3.29) , (3.30) ci informano che $G_{0\mu}$ è continuo su Σ , cioé

$$G_{0\mu}|_\Sigma = 0 \qquad\qquad G_{0\mu} \in C_\Sigma \qquad (3.34)$$

Le condizioni (3.32) e (3.34) prendono il nome di *condizioni di raccordo di Darmois.*
Una forma equivalente alla (3.34) si ottiene ricordando che in coordinate normali gaussiane vale

$$G_{\mu\nu} n^\nu = G_{\mu 0} n^0 = \varepsilon\, G_{\mu 0}$$

e quindi

$$G_{\mu 0}|_\Sigma = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (G_{\mu\nu} n^\nu)\,|_\Sigma = 0 \qquad (3.35)$$

detta *condizione di raccordo di Israel*

3.2.2 Condizioni di raccordo per il tensore energia momento

Nel precedente paragrafo abbiamo ottenuto le condizioni di raccordo per il tensore di Ricci e per quello di Einstein nel caso particolare in cui la regione esterna sia occupata da spazio vuoto. Mantenendoci nelle stesse condizioni affrontiamo ora il problema di come incollare su Σ il tensore energia-momento.

Fluido Perfetto Supponiamo che nella regione interna M^- si trovi un fluido perfetto con densità $\rho > 0$ e che la superficie Σ sia di tipo tempo. Il tensore energia-momento dei fluidi perfetti sarà

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)\, u^\mu\, u^\nu + p\, g^{\mu\nu}$$

All'esterno vi è uno spazio-tempo vuoto e quindi vale la seconda condizione di Darmois (3.34)

$$G^{\mu 0}|_\Sigma = 0$$

che equivale a

$$T^{\mu\nu}|_\Sigma = [(p + \rho)\, u^\mu\, u^\nu + p\, g^{\mu\nu}]\,|_\Sigma = 0 \tag{3.36}$$

La (3.36) è soddisfatta se

$$u^0|_\Sigma = 0 \qquad\qquad p|_\Sigma = 0 \tag{3.37}$$

La sottovarietà di confine è generata da geodetiche di tipo tempo della regione interna e su Σ la pressione del fluido è nulla.
L'esistenza di una metrica esterna è garantita dal teorema di Cauchy; infatti le equazioni di Einstein ammettono una soluzione almeno locale che soddisfi le condizioni (3.37).

Polvere Consideriamo il caso in cui in M^- vi è della polvere in assenza di campo elettromagnetico. Il tensore energia-momento è

$$T^{\mu\nu} = \rho\, u^\mu\, u^\nu \tag{3.38}$$

con $\rho > 0$. Imponendo ancora la (3.34) si ottiene

$$u^0|_\Sigma = 0$$

e ricadiamo così nel caso del fluido perfetto.

Campo elettromagnetico Se in M^- vi sono delle cariche elettriche, il tensore energia-momento è

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(pf)} + T^{\mu\nu}_{(em)}$$

dove $T^{\mu\nu}_{(pf)}$ è il tensore energia momento dei fluidi perfetti (può essere sostituito da quello per il modello a polvere) e $T^{\mu\nu}_{(em)}$ è il tensore energia-momento del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$.
Considerazioni analoghe ai casi precedenti portano ad avere

$$u^0|_\Sigma = 0 \qquad\qquad p|_\Sigma = 0$$

Bisogna però imporre un'ulteriore condizione: la continuità delle equazioni del campo elettromagnetico

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}|_\Sigma = 0 \tag{3.39a}$$
$$\nabla_{[i} F_{jk]}|_\Sigma = 0 \tag{3.39b}$$

Le incognite ora sono $F^{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ nella regione esterna con le condizioni al contorno individuate dalle (3.37),(3.39a) e (3.39b). Il problema di Cauchy è ben posto, dunque sono assicurate l'esistenza e l'unicità – almeno locale – del prolungamento verso l'esterno.

3.3 Ipersuperfici singolari del primo ordine

In natura oltre alle superfici singolari di ordine superiore al primo – descritte nel paragrafo precedente – esistono sottovarietà tridimensionali attraverso cui le derivate prime della metrica non sono più continue: le *ipersuperfici singolari del primo ordine* o *surface layers* .[12][4] Ricordando la definizione di curvatura esterna, esse sono individuate dalla condizione

$$[K_{ij}] \neq 0 \tag{3.40}$$

L'approccio di Lichnerovitz – basato sull'esistenza del sistema di coordinate ammissibile – non è più utilizzabile perché ora le derivate prime della metrica non sono continue. Bisogna dunque seguire un'altra via e descrivere le proprietà della ipersuperficie singolare abbandonando ogni riferimento al sistema di coordinate utilizzato.

Indichiamo ancora con M^+ ed M^- la varietà esterna e quella interna; le loro metriche sono $g^+_{\alpha\beta}(x^\mu_+)$ e $g^-_{\alpha\beta}(x^\mu_-)$ dove $\{x^\mu_+\}$ e $\{x^\mu_-\}$ sono due sistemi di coordinate in M^+ e M^- indipendenti fra loro. Entrambe le varietà sono delimitate da due ipersuperfici Σ^+ e Σ^- con metriche $h^+_{ab}(\xi_+)$ e $h^-_{ab}(\xi_-)$ dove ξ_+ e ξ_- sono le coordinate relative a Σ^+ e Σ^-. Imponiamo che le ipersuperfici siano isometriche

$$h^+_{ab}(\xi_+) = h^-_{ab}(\xi_-) = h_{ab}(\xi) \qquad (3.41)$$
$$\Sigma = \Sigma^+ = \Sigma^- \qquad (3.42)$$

Le equazioni parametriche della ipersuperficie ora sono due , a seconda che si consideri M^+ o M^-

$$x^\alpha_\pm = f^\alpha_\pm(\xi^i) \qquad (3.43)$$

il che porta ad individuare due basi di vettori tangenti

$$e^\alpha_{(i)}|_\pm = \frac{\partial x^\alpha_\pm}{\partial \xi^i} \qquad (3.44)$$

Questi vettori proiettano su Σ la stessa metrica

$$h_{ij} = g_{\alpha\beta}\, e^\alpha_{(i)} e^\beta_{(j)} \qquad (3.45)$$

La (3.45) ci dice che le due metriche quadridimensionali $g^\pm_{\alpha\beta}$ sono continue su Σ.
Il vettore normale $\vec{n}$ a Σ supponiamo che sia diretto da M^- ad M^+ e che sia normalizzato come la (3.7). Ricordiamo infine la definizione di curvatura esterna

$$K_{ij} = \nabla_i n_j$$

3.3.1 Il tensore di Lanczos

Definiamo il *tensore di Lanczos* come

$$8\pi S_{ij} = -[K_{ij}] + h_{ij}[K^l_l] \qquad (3.46)$$

che equivale a

$$[K_{ij}] = -8\pi\left(S_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}S\right) \qquad (3.47)$$

Il tensore S_{ij} è definito sulla sottovarietà Σ ed è il tensore energia momento della ipersuperficie.[16] Per dare una giustificazione euristica a quest'ultima proprietà, consideriamo la Σ come il limite di uno strato infinitesimo di spessore ε. Siano ora S^+ ed S^- le due superfici che delimitano lo strato. Posizioniamo su S^- un sistema di coordinate normali di Gauss; l'equazione delle due ipersuperfici sarà allora

$$\begin{aligned} S^- &: x^0 = 0 \\ S^+ &: x^0 = \varepsilon \end{aligned}$$

Valgono inoltre le equazioni

$$K^{\pm}_{ij} = \frac{1}{2}\partial_0\, {}^4g_{ij}\,|_{\pm} \tag{3.48a}$$

$${}^4R_{ij} = \left({}^3R_{ij} + \partial_0 K_{ij} - KK_{ij} + 2K_i^m K_{mj}\right)|_{\pm} \tag{3.48b}$$

Integrando le equazioni di Einstein attraverso lo strato si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon {}^4R_{ij} &= \int_0^\varepsilon -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right)dx^0 = \\ &= K^+_{ij} - K^-_{ij} + \int_0^\varepsilon \left({}^3R_{ij} - KK_{ij} + 2K_i^m K_{mj}\right)dx^0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Passando ora al limite $\varepsilon \to 0$, K_{ij} non varierà di molto all'interno dello strato e quindi l'integrale a secondo membro si annullerà. Paragonando ora il risultato della (3.49) con la (3.47) si ottiene

$$S_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon T_{ij}\,dx^0$$

È dunque ragionevole chiamare S_{ij} il tensore energia momento della ipersuperficie Σ.

Per ricavare le equazioni che descrivono la Σ bisogna ricordare le (3.13a) e (3.13b) che qui riscrivo

$$\begin{aligned} -2\varepsilon G_{\alpha\beta}\, n^\alpha n^\beta &= {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 \\ G_{\alpha\beta}\, e^\alpha_{(i)} n^\beta &= K^j_{i\,|\,j} - K_{|\,i} \end{aligned}$$

Sostituendo queste equazioni in quelle di Einstein e facendo la differenza fra la parte relativa ad M^+ e quella relativa ad M^- si ottiene

$$S^{ij}\,\tilde{K}_{ij} = [T_{\mu\nu}\, n^\mu n^\nu] \tag{3.50a}$$

$$S^j_{i\,|\,j} = -\left[T_{\mu\nu}\, e^\mu_{(i)} n^\nu\right] \tag{3.50b}$$

dove $\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{2}\left[K^+_{ij} + K^-_{ij}\right]$.[23][22][9]

3.3.2 Ipersuperfici singolari del primo ordine di tipo luce

Per concludere la trattazione delle superfici di discontinuità, bisogna ancora affrontare il caso in cui la Σ sia una ipersuperficie di tipo luce.[14][5] In questo caso le relazioni individuate nel paragrafo precedente non sono più valide in quanto il vettore normale $\vec{n}$ a Σ risulta essere tangente alla superficie e la curvatura esterna non reca alcuna informazione della geometria esterna.

Introduciamo un *vettore trasversale* $\vec{N}$ alla Σ. Per assicurarci che $\vec{N}^+ = \vec{N}^-$ richiediamo che la loro proiezione $N_a = \vec{N} \cdot \vec{e}_a$ su Σ sia identica

$$N_\mu\, e^\mu_{(a)}|_+ = N_\mu\, e^\mu_{(a)}|_- \tag{3.51}$$

Il prodotto scalare di $\vec{N}$ con il vettore normale $\vec{n}$ è diverso da zero

$$\vec{N} \cdot \vec{n} = \eta^{-1} \neq 0 \tag{3.52}$$

dove η^{-1} è una funzione delle coordinate ξ^i della superficie.
Facendo la trasformazione

$$\vec{N} \rightarrow \vec{N}\,' = \vec{N} + \lambda^a(\xi)\,\vec{e}_a \tag{3.53}$$

la (3.52) non si modifica perché abbiamo compiuto una traslazione tangenziale su Σ.
Introduciamo ora la *curvatura esterna trasversale*

$$\nabla_a \vec{N} = B^b_a\,\vec{e}_b \tag{3.54}$$

che risulta un tensore simmetrico, infatti

$$\begin{aligned} B_{ab} &= B^d_a\, h_{bd} = B^d_a\,\vec{e}_d \cdot \vec{e}_b = \left(\nabla_a \vec{N}\right) \vec{e}_b \\ &= -\vec{N}\;\nabla_a \vec{e}_b = -\vec{N}\;\nabla_b \vec{e}_a = B_{ba} \end{aligned} \tag{3.55}$$

La curvatura esterna trasversale non è indipendente dalla scelta del vettore $\vec{N}$, infatti compiendo una trasformazione (3.53) , B_{ab} assume la forma

$$B'_{ab} = B_{ab} - \lambda^c \Gamma_{c,\,ab} \tag{3.56}$$

La (3.56) mostra anche che la curvatura esterna trasversale non si trasforma come un tensore tridimensionale. I simboli di Christoffel inoltre potrebbero causare qualche problema sulla continuità , ma questo non avviene perché essi coinvolgono le derivate tangenziali della metrica , che sono continue attraverso Σ.
Se consideriamo

$$\gamma_{ab} = 2\,[B_{ab}] \tag{3.57}$$

γ_{ab} sarà un tensore tridimensionale e sarà anche indipendente dalla scelta del vettore $\vec{N}$. A partire da γ_{ab} possiamo anche costruire un tensore quadridimensionale

$$\gamma_{\mu\nu}\, e^{\mu}_{(a)} e^{\nu}_{(b)} = \gamma_{ab} \tag{3.58}$$

che ci permette di ottenere il tensore energia momento della Σ di tipo luce

$$16\pi\eta^{-1} S^{\mu\nu} = 2\gamma^{(\mu}\, n^{\nu)} - \gamma\, n^{\mu}\, n^{\nu} + \tilde{\gamma}\, g^{\mu\nu} \tag{3.59}$$

dove $\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu\nu}\, n_{\nu}$, $\tilde{\gamma} = \gamma^{\mu}\, n_{\mu}$, $\gamma = \gamma^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$.
È da notare che il tensore $S^{\mu\nu}$ viene calcolato o in M^{+} o in M^{-} . Noto $S^{\mu\nu}$ posso costruirmi anche il tensore intrinseco alla Σ

$$S^{ab}\, e^{\mu}_{(a)} e^{\nu}_{(b)} = S^{\mu\nu} \tag{3.60}$$

che sarà espresso in funzione di γ_{ab}.
La trasformazione (3.58) lascia $\gamma_{\mu\nu}$ indeterminato, infatti vale

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + 2\lambda_{(\mu}\, n_{\nu)} \tag{3.61}$$

dove λ_{μ} è un qualsiasi vettore quadridimensionale su Σ. La (3.61) e la (3.58) ci permettono di dire che S^{ab} dipende solo da γ_{ab} e non da eventuali termini derivanti da λ_{μ} .
Bisogna ora costruirsi un metodo per innalzare gli indici, in quanto la metrica h_{ab} è degenere e la sua inversa non è definita. Scomponiamo il vettore $\vec{n}$ rispetto alla base obliqua $\left\{\vec{N}\,,\,\vec{e}_a\right\}$:

$$n^{\mu} = l^{a}\, e^{\mu}_{(a)} \tag{3.62}$$

e costruiamo la metrica inversa h_*^{ab} che soddisfa l'equazione

$$h_*^{ij}\, h_{kj} = \delta^i_k - \eta\, l^i N_k \tag{3.63}$$

È da notare però che h_*^{ij} è definita a meno di una trasformazione

$$h_*'^{ij} = h_*^{ij} + 2\lambda\, l^i\, l^j$$

in quanto $h_{ij}\, l^j = 0$ (relazione che si ottiene moltiplicando la (3.62) per $\vec{e}_b$ e ricordando che $\vec{n}\cdot\vec{e}_b = 0$).
Una volta specificato il metodo per innalzare gli indici, si può ottenere il legame fra S^{ab} e γ_{ab}

$$16\pi\eta^{-1} S^{ab} = \left[h_*^{ac}\, l^b\, l^d + l^a\, l^c h_*^{bd} - h_*^{ab}\, l^c\, l^d - l^a\, l^b h_*^{cd}\right]\, \gamma_{cd} \tag{3.64}$$