Capitolo 2

SOLUZIONI ESATTE

La Metrica di uno spazio-tempo soddisfa le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso e in generale risulta essere del tutto arbitrario. Si definiscono *soluzioni esatte* dell'equazioni di Einstein gli spazi-tempo (M, g) in cui le equazioni di campo sono verificate e dove il tensore $T_{\mu\nu}$ soddisfa una delle condizioni sull'energia. In particolare si possono cercare le soluzioni per uno spazio vuoto $(T_{\mu\nu} = 0)$, per un campo elettromagnetico, per un fluido perfetto ed evntualmente per uno spazio-tempo contenente sia un fluido perfetto, sia un campo elettromagnetico.[15]

Data la complessità delle equazioni di campo conviene ricercare le soluzioni esatte *a simmetria sferica.*

Esiste un sistema di coordinate per cui una metrica che sia a simmetria sferica assume la forma

$$ds^2 = -F(r,t)\,dt^2 + 2E(r,t)\,dt\,d\vec{x}\cdot d\vec{x} + D(r,t)\left(\vec{x}\cdot d\vec{x}^2\right) + C(r,t)(d\vec{x})^2 \tag{2.2}$$

dove $r = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$.
Passando a coordinate sferiche polari

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3 &= r\cos\theta \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F(r,t)dt^2 + 2rE(r,t)dt\,dr + r^2D(r,t)dr^2 + \\ &\quad +C(r,t)\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

che possiamo scrivere ridefinendo $\tilde{E}(r,t) = rE(r,t)$ e $\tilde{D}(r,t) = r^2D(r,t) + C(r,t)$. Per semplicità di notazione si omette la tilde nel nome delle nuove funzioni.
Si procede a fissare il sistema di coordinate.
Per la parte spaziale si impone

$$\tilde{r} = r\sqrt{C(r,t)}$$

da cui si ottiene – omettendo la tilde nel nome delle nuove coordinate –

$$ds^2 = -F(r,t)dt^2 + 2E(r,t)dt\,dr + D(r,t)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.4}$$

La condizione che fissa la coordinata temporale elimina il termine misto:

$$dt' = \eta(r,t)\left[E(r,t) - F(r,t)\,dt\right]$$

dove $\eta(r,t)$ è una funzione che rende il secondo membro un differenziale esatto. La metrica risulta essere quindi

$$ds^2 = -B(r,t)dt^2 + A(r,t)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.5}$$

dove abbiamo omesso gli apici alle nuove coordinate.

2.1 Soluzione di Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild è una soluzione esatta che soddisfa le seguenti ipotesi:

1 spazio vuoto
2 simmetria sferica
3 stazionarietà, ovvero ogni componente $g_{\mu\nu}$ della metrica è indipendente dalla coordinata temporale
4 assenza di campo elettromagnetico
5 curvatura nulla al limite r $\rightarrow \infty$

Aggiungendo l'ipotesi 3 alla (2.2), la (2.5) diventa

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.6}$$

Le ipotesi 1 e 4 si traducono in $T^{\mu\nu} = 0$. Le equazioni (2.1) diventano quindi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{2.7}$$

Facendo la traccia della (2.7) si ottiene che

$$R = 0$$

perciò le equazioni di Einstein assumono la forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.8}$$

Dalla (2.6) si ottengono le componenti della metrica

$$\begin{array}{lll} g_{00} = -B(r) & g_{11} = A(r) & g_{22} = r^2 \\ g_{33} = r^2\sin^2\theta & g_{\mu\nu} = 0 \ per \ \mu \neq \nu & \end{array}$$

dove $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$.
Il tensore metrico inverso ha componenti

$$\begin{array}{lll} g^{00} = -B^{-1}(r) & g^{11} = A^{-1}(r) & g^{22} = r^{-2} \\ g^{33} = r^{-2}\sin^{-2}\theta & g^{\mu\nu} = 0 \ per \ \mu \neq \nu & \end{array}$$

Si ricavano ora i simboli di Christoffel secondo l'equazione

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\nu}\right)$$

Le uniche componenti della connessione non nulle sono[1]

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}A'A^{-1} & \Gamma^1_{33} = -A^{-1}r\sin^2\theta & \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot g\theta \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = r^{-1} & \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = r^{-1} & \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}B'B^{-1} \\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}B'A^{-1} & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^1_{22} = -rA^{-1} \end{array}$$

[1]si sottintende che $A' = \frac{dA}{dr}$ e $B' = \frac{dB}{dr}$

Dalla (1.16) si ricava, contraendo il primo e il terzo indice, che

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \tag{2.9}$$

sostituendo le espressioni ricavate per i simboli di Christoffel, si ottengono gli unici tensori di Ricci non identicamente nulli:

$$R_{00} = +\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rA} \tag{2.10a}$$

$$R_{11} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rA} \tag{2.10b}$$

$$R_{22} = +1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) - \frac{1}{A} \tag{2.10c}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \tag{2.10d}$$

Uguagliando a zero le (2.10a) – (2.10d) si ottengono le equazioni (2.8). Calcolando quindi

$$\frac{R_{11}}{A} + \frac{R_{00}}{B} = +\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0$$

si ha

$$AB = c$$

Sul contorno ($r \to \infty$) lo spazio deve essere piatto per l'ipotesi 5, quindi la metrica – al limite – coincide con quella di Minkowski :

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1$$

da cui si ricava che la costante è unitaria:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \tag{2.11}$$

Sostituendo questo risultato in $R_{22} = 0$ si ottiene

$$R_{22} = +1 - rB' - B = 0$$

ovvero

$$\frac{d\,(Br)}{dr} = rB' + B = 1$$

da cui si ottiene

$$B(r) = 1 + \frac{k}{r}$$

dove k è una costante da determinare.

Poiché le equazioni di Einstein valgano al limite non relativistico deve essere

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \tag{2.12}$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale newtoniano

$$\Phi = -\frac{MG}{r}$$

Sarà quindi

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \\ B &= 1 - \frac{2MG}{r} \end{aligned} \tag{2.13}$$

da cui risulta la *Soluzione di Schwarzschild*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.14}$$

2.2 Il Teorema di Birkhoff

Ci si pone ora il problema di trovare la soluzione esatta che soddisfa alle seguenti ipotesi

1 spazio vuoto
2 simmetria sferica
3 assenza di campo elettromagnetico
4 curvatura nulla al limite $r \to \infty$

E' stata cioé tolta dalle ipotesi di Schwarzschild l'ipotesi di stazionarietà.
Ripartiamo dalla (2.5)

$$ds^2 = -B(r,t)dt^2 + A(r,t)dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

e ricaviamo le componenti del tensore metrico:

$$\begin{array}{lll} g_{00} = -B(r,t) & g_{11} = A(r,t) & g_{22} = r^2 \\ g_{33} = r^2 \sin^2\theta & g_{\mu\nu} = 0 & se\, \mu \neq \nu \end{array}$$

Le componenti del trnsore g^{-1} sono:

$$\begin{array}{lll} g^{00} = -B^{-1}(r,t) & g^{11} = A^{-1}(r,t) & g^{22} = r^{-2} \\ g^{33} = r^{-2}\sin^{-2}\theta & g^{\mu\nu} = 0 & se\, \mu \neq \nu \end{array}$$

a questo punto si ricavano i simboli di Christoffel[2]:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}A^{-1}A' & \Gamma^1_{33} = -A^{-1} r \sin^2\theta & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot g\theta \\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}A^{-1}B' & \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}B^{-1}B' & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = r^{-1} \\ \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = r^{-1} & \Gamma^1_{22} = -rA^{-1} & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}B^{-1}\dot{A} & \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}B^{-1}\dot{B} & \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}A^{-1}\dot{A} \end{array}$$

Come visto nella (2.9) , il tensore di Ricci ha componenti

$$R_{00} = +\frac{B''}{2A} - \frac{A'B'}{4A^2} + \frac{B'}{rA} - \frac{B'^2}{4AB} - \frac{\ddot{A}}{2A} + \frac{\dot{A}^2}{4A^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} \tag{2.15a}$$

$$R_{11} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'^2}{4B^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{A'}{Ar} + \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} - \frac{\dot{A}^2}{4AB} \tag{2.15b}$$

$$R_{22} = +1 - \frac{1}{A} + \frac{rA}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB} \tag{2.15c}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \tag{2.15d}$$

$$R_{01} = \frac{\dot{A}}{rA} \tag{2.15e}$$

Confrontando con le (2.10a) – (2.10d) vediamo che le espressioni coincidono tranne per i termini in più che contengono derivate prime e seconde rispetto al tempo di A e di B.
Usiamo ora le equazioni

$$R_{\mu\nu} = 0$$

[2] $A' = \frac{\partial A}{\partial r}$ $\quad B' = \frac{\partial B}{\partial r}$ $\quad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$ $\quad \dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}$

In particolare

$$R_{01} = \frac{\dot{A}}{rA} = 0$$

dà

$$\dot{A} = 0$$

risultato che sostituito nella

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = 0$$

dà, come nel caso di Schwarzschild

$$A = \frac{1}{B}$$

In conclusione, pur non avendo ipotizzato la stazionarietà, si ottiene una soluzione indipendente dal tempo e si rientra nel caso di Schwarzschild con la metrica (2.14). Abbiamo dimostrato il

Teorema 10 *un campo gravitazionale a simmetria sferica nello spazio vuoto è necessariamente stazionario e la metrica che lo descrive è quella di Schwarzschild*

2.3 Singolarità

La metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (2.16)$$

presenta due singolarità: una in $r = 0$, la seconda in $r = 2M$. La prima è una singolarità effettiva, mentre $r = 2M$ è spuria in quanto dipende dal sistema di coordinate.
Per valutare le differenze fra i due punti consideriamo un osservatore – con relativo sistema di coordinate ortonormale – in caduta libera sullla singolarità.

La sua traiettoria è descritta dalle equazioni

$$\frac{\tau}{2M} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} + c \tag{2.17a}$$

$$\frac{t}{2M} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln\left|\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2M}}{\sqrt{r}-\sqrt{2M}}\right| + c \tag{2.17b}$$

dove τ è il tempo proprio.
Invertendo la prima relazione si esprime r in funzione di τ , mentre invertendo la seconda si ottiene r dipendente dal tempo coordinato t . Dalle (2.17a) - (2.17b) ricaviamo

$$\frac{r}{2M} = 1 - \frac{\tau + c}{2M} \tag{2.18a}$$

$$\frac{r}{2M} = 1 + c\, \exp\left(-\frac{t}{2M}\right) \tag{2.18b}$$

ed è facile osservare che il raggio di Schwarzschild è raggiunto in un lasso finito di tempo proprio, mentre è necessario un tempo infinito se si usa t.

Per valutare se $r = 2M$ è una singolarità effettiva, si calcola il tensore di Riemann nel sistema di riferimento dell'osservatore. Prima però è opportuno considerare un Sistema a riposo, individuato dalla base ortonormale

$$\begin{array}{ll} \omega^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt & \omega^r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \\ \omega^\theta = r d\theta & \omega^\varphi = r \sin\theta d\varphi \end{array} \tag{2.19}$$

Le componenti del tensore di Riemann sono

$$\begin{array}{ll} R_{trtr} = -\frac{2M}{r^3} & R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \frac{2M}{r^3} \\ R_{t\theta t\theta} = R_{t\varphi t\varphi} = \frac{M}{r^3} & R_{r\theta r\theta} = R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{M}{r^3} \end{array} \tag{2.20}$$

Le altre componenti di $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ sono nulle, eccetto quelle che si ottengono per simmetria dalle precedenti.
Per passare ad un sistema in caduta libera si applica una trasformazione di Lorentz al sistema a riposo, con una velocità

$$v^r = \frac{(g_{rr})^{\frac{1}{2}}\, dr}{(-g_{tt})^{\frac{1}{2}}\, dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{dt} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se ricalcoliamo le componenti del tensore di Riemann otteniamo di nuovo le (2.20), da cui si nota subito la loro non singolarità per $r = 2M$. La situazione cambia se consideriamo il punto $r = 0$, dove le (2.20) sono effettivamente singolari.

Ritornando alla forma della metrica, è facile constatare che per $r = 2M$ il ruolo delle coordinate t ed r si inverte; infatti per $r > 2M$ il vettore $\partial/\partial t$ è di tipo tempo ($g_{tt} < 0$) e $\partial/\partial r$ di tipo spazio ($g_{rr} > 0$) , mentre per $r < 2M$ la situazione si inverte.
Se $r = 2M$ g_{tt} tende a zero e g_{rr} all'infinito. L'annullamento di g_{tt} suggerisce che la superficie $r = 2M$ - che a prima vista appare 3-dimensionale - sia in realtà bidimensionale; infatti calcolando il volume della ipersuperficie si ha

$$\int_{r=2M} |g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}|^{\frac{1}{2}}\, dt\; d\theta\; d\varphi = 0$$

La divergenza di g_{rr} invece non implica che la superficie $r = 2M$ sia infinitamente lontana dalle regioni circostanti di spazio-tempo. Se a tal proposito si calcola la distanza propria di un punto da $r = 2M$ si ricava

$$\int_{2M}^{r} |g_{rr}|^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} [r\,(r-2M)]^{\frac{1}{2}} + 2M \ln\left|\left(\frac{r}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}\right| & r > 2M \\ -2M\cot^{-1}\left[\left(\frac{r}{2M-r}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - [r\,(2M-r)]^{\frac{1}{2}} & r < 2M \end{cases}$$

che assume valori finiti per $0 < r < \infty$.

2.3.1 Coordinate Isotrope

Un sistema di coordinate in cui si esprime spesso la metrica di Schwarzschild è quello isotropo.[19] La forma di una metrica a simmetria sferica in queste coordinate è

$$ds^2 = -C(\rho)\; dt^2 + D(\rho)\; \left[d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{2.21}$$

Per determinare le trasformazioni che legano le coordinate Isotrope a quelle curvilinee, è necessario calcolare le funzioni $C(\rho)$ e $D(\rho)$. Confrontando la metrica (2.21) con quella di Schwarzschild si hanno le equazioni

$$r^2 = D(\rho)\rho^2 \tag{2.22a}$$
$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = D(\rho)\; d\rho^2 \tag{2.22b}$$

Ricavando $D(\rho)$ dalla (2.22a) , sostituendo nella (2.22b) e integrando si ha infine

$$\rho = \frac{1}{2}\left[r - M \pm \sqrt{r^2 - 2Mr}\right] \tag{2.23}$$

Si noti che la trasformazione è valida solo per $r > 2M$ quindi le coordinate isotrope non ricoprono tutta la varietà ma solo la regione $r > 2M$, $(\rho > \frac{M}{2})$. Elevando al quadrato la (2.23) si ottiene

$$r^2 = \rho^2\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \tag{2.24}$$

Andando a sostituire quest'ultima nella metrica di Schwarzschild, si ricava la metrica di Schwarzschild in coordinate isotrope

$$ds^2 = -\left(\frac{2\rho - M}{2\rho + M}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 \left[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right] \tag{2.25}$$

Dalla (2.25) si nota che la coordinata radiale ρ non è il raggio effettivo; questo infatti è dato dalla (2.24).

2.3.2 Coordinate di Eddington-Finkelstein

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente per $r = 2M$ lo spazio-tempo non è singolare e quindi le coordinate curvilinee (r, t, θ, φ) non ricoprono tutta la varietà. Per eliminare la singolarità spuria generalmente si costruisce una estensione della "regione singolare" , cioé uno spazio-tempo $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ regolare che contenga come suo sottoinsieme la varietà di partenza.

Prendiamo in esame le coordinate di Eddington-Finkelstein.

Le geodetiche di tipo luce sono

$$ds^2 = 0 \tag{2.26}$$

Si introducono le coordinate $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ che parametrizzano le (2.26) in entrata o in uscita dalla singolarità. Nel primo caso l'equazione delle geodetiche diventa

$$\tilde{V} = t + r^* = c \tag{2.27}$$

dove r^* è legato alle vecchie coordinate dalla relazione

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \tag{2.28}$$

La metrica di Schwarzschild assume allora la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{V}^2 + 2\, d\tilde{V}\, dr + r^2\, d\Omega^2 \tag{2.29}$$

Se consideriamo i fotoni che escono dalla singolarità, l'equazione delle geodetiche diviene

$$\widetilde{U} = t - r^* = c \tag{2.30}$$

e la metrica è

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\widetilde{U}^2 - 2\, d\widetilde{U}\, dr + r^2 d\Omega^2 \tag{2.31}$$

Invece di usare i due sistemi $\left(\tilde{V}, r, \theta, \varphi\right)$ e $\left(\widetilde{U}, r, \theta, \varphi\right)$ si può costruire un nuovo insieme di coordinate sruttando solo $\widetilde{U}$ e $\tilde{V}$. Le relazioni con le vecchie coordinate curvilinee sono

$$\tilde{V} - \widetilde{U} = 2r^* \tag{2.32a}$$

$$\tilde{V} + \widetilde{U} = 2t \tag{2.32b}$$

e la metrica assume la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\widetilde{U}\, d\tilde{V} + r^2 d\Omega^2 \tag{2.33}$$

Utilizzando la relazione (2.28) si può scrivere l'equazione

$$\exp\left(\frac{\tilde{V} - \widetilde{U}}{4M}\right) = \exp\left(\frac{r^*}{2M}\right) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right)$$

e costruire un'ulteriore coppia di coordinate

$$\tilde{u} = -\exp\left(-\frac{\widetilde{U}}{4M}\right) = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M} - \frac{t}{4M}\right) \tag{2.34a}$$

$$\tilde{v} = \exp\left(\frac{\tilde{V}}{4M}\right) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M} + \frac{t}{4M}\right) \tag{2.34b}$$

che porta ad una metrica

$$ds^2 = -\left(\frac{32M^3}{r}\right)\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)\, d\tilde{v}\, d\tilde{u} + r^2 d\Omega^2 \tag{2.35}$$

E' facile osservare che per $r = 2M$ la (2.35) non è singolare.
Si noti inoltre che r è ancora definito dalla relazione $4\pi r^2$ = *area della superficie,* ma ora deve essere pensato come come una funzione di $\tilde{u}$ e di $\tilde{v}$:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\exp\left(\frac{r}{2M}\right) = -\tilde{v}\,\tilde{u} \tag{2.36}$$

Le coordinate $(\tilde{u}, \tilde{v})$ che parametrizzano le superfici di tipo luce in entrata ed in uscita, sono di tipo luce ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tilde{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial\tilde{u}} &= g_{\tilde{u}\tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\tilde{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial\tilde{v}} &= g_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0 \end{aligned}$$

2.3.3 Coordinate di Kruskal-Szekeres

Le coordinate di Kruskal-Szekeres utilizzano due coordinate (u, v) di tipo tempo e di tipo spazio al posto delle $(\tilde{u}, \tilde{v})$ di tipo luce delle coordinate di Eddington-Finkelstein:

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.37a}$$

$$v = \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.37b}$$

così che

$$dv^2 - du^2 = d\tilde{v}\, d\tilde{u} \tag{2.38}$$

La metrica assume la forma

$$ds^2 = \left(\frac{32M^3}{r}\right)\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)\left(-dv^2 + du^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{2.39}$$

Sebbene la (2.39) sia regolare per $r = 2M$, le trasformazioni (2.37a) – (2.37b) diventano immaginarie per $r < 2M$. Esse dunque sono valide solo per $r > 2M$.
Se ci spostiamo all'interno del raggio di Schwarzschild bisogna sostituire le (2.37a) con

$$u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.40a}$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.40b}$$

Nelle coordinate di Kruskal-Szekeres la singolarità $r = 0$ è posta in $v^2 - u^2 = 1$, relazione che porta alle due superfici

$$\begin{aligned} v &= \left(1 + u^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ v &= -\left(1 + u^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Inoltre se consideriamo $r \gg 2M$ essa corrisponde a $u^2 \gg v^2$; la regione all'esterno del raggio di Schwarzschild è dunque

$$\begin{aligned} u &\gg +|v| \\ u &\ll -|v| \end{aligned}$$

La causa dello sdoppiarsi delle proprietà metriche di Schwarzschild va ricercata nel fatto che le abituali coordinate non ricoprono tutto lo spazio-tempo. Si noti inoltre che le equazioni (2.37a) e (2.40a) ricoprono i quadranti $u > |v|$ ($I°$ quadrante) e $v > |u|$ ($II°$ quadrante) , mentre se valgono le disuguaglianze inverse esse non sono più valide. Si può dimostrare allora che gli ulteriori due quadranti sono ricoperti da altre coordinate di Kruskal-Szekeres, legate a quelle curvilinee dalle equazioni

$$u = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.41a}$$

$$v = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.41b}$$

per il III° quadrante, e

$$u = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.42a}$$

$$v = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.42b}$$

per il IV° quadrante.

Le trasformazioni inverse sono

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right) \exp\left(\frac{r}{4M}\right) = u^2 - v^2 \tag{2.43}$$

$$t = 4M \tanh^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \qquad I\ ,\ III \tag{2.44a}$$

$$t = 4M \tanh^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) \qquad II\ ,\ IV \tag{2.44b}$$

Le equazioni (2.43) - (2.44b) rivelano che le regioni $r = costante$ sono iperboli con asintoti $u = \pm\ v$ e che le $t = costante$ sono linee rette passanti per l'origine.

Infine le geodetiche di tipo luce sono rette inclinate di 45° , proprio come nel caso di Minkowski, perché vale la condizione $du = \pm\ dv$, che garantisce $ds^2 = 0$.

2.4 Soluzione di Schwarzschild interna

La soluzione che cerchiamo deve soddisfare le seguenti ipotesi:

1 fluido perfetto
2 simmetria sferica
3 stazionarietà
4 assenza di campo elettromagnetico

Consideriamo perciò una regione sferica di raggio r_0 al cui interno si trovi un fluido perfetto con pressione p e densità ρ dipendenti solo da r.Il tensore energia momento da utilizzare (ipotesi 1 , 3 , 4) sarà

$$T^{\mu\nu} = (p(r) + \rho(r))\, u^\mu u^\nu + p(r)\, g^{\mu\nu} \tag{2.45}$$

Le ipotesi fatte ci permettono di partire ancora dalla metrica (2.5) per ricavare i tensori di Ricci (2.10a) – (2.10d). Scegliamo le equazioni di Einstein nella forma

$$R_{\mu\nu} = +8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.46}$$

che rilette secondo le (2.10a) – (2.10d)e (2.45) danno

$$\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rA} = 4\pi G\left(\rho + 3p\right)B \tag{2.47a}$$

$$-\frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rA} = 4\pi G\left(\rho - p\right)A \tag{2.47b}$$

$$1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) - \frac{1}{A} = 4\pi G\left(\rho - p\right)A \tag{2.47c}$$

Bisogna ancora introdurre l'equazione dell'*equilibrio idrostatico* che siottiene applicando la

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

al tensore energia momento dei fluidi perfetti; il risultato è

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p}{p+\rho} \tag{2.48}$$

Siamo ora in grado di andare a ricavare le funzioni $A\left(r\right)$ e $B\left(r\right)$. Calcoliamo la quantità

$$\frac{R_{11}}{2A} + \frac{R_{22}}{r^2} + \frac{R_{00}}{2B} = +\frac{A'}{rA^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{Ar^2} = -8\pi G\rho \tag{2.49}$$

che può essere riscritta come

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi G\rho \tag{2.50}$$

Una soluzione con la condizione $A\left(0\right)$ finito è

$$A\left(r\right) = \left[1 - \frac{2GM\left(r\right)}{r}\right]^{-1} \tag{2.51}$$

con[3]

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr' \tag{2.52}$$

Possiamo ora sostituire la (2.52) e la (2.48) nella (2.47b) per ottenere

$$-1 + \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]\left[1 - \frac{rp'}{p+\rho}\right] + \frac{GM(r)}{r} - 4\pi G\rho r^2 = -4\pi G(\rho - p)r^2$$

che si riscrive come

$$-r^2 p'(r) = GM(r)\rho(r)\left[1 + \frac{p(r)}{\rho(r)}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1} \tag{2.53}$$

Sostituendo quest'ultima nella (2.48) otteniamo

$$\frac{B'}{B} = \frac{2G}{r^2}\left[M(r) + 4\pi r^3 p(r)\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1} \tag{2.54}$$

La soluzione , con $B(\infty) = 1$ è

$$B(r) = \exp\left\{-\int_r^\infty \frac{2G}{r^2}\left[M(r) + 4\pi r^3 p(r)\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1} dr\right\} \tag{2.55}$$

Di particolare interesse è il caso in cui

$$\rho = \rho_0 = costante \tag{2.56}$$

perchè - oltre a caratterizzare una stella statica con densità costante - permette di ottenere una soluzione esatta alle equazioni di Einstein.[18][21] Sostituendo la (2.56) nella (2.53) si ha

$$\frac{-3p'(r)}{[\rho_0 + p(r)][\rho_0 + 3p(r)]} = 4\pi r\left[1 - \frac{8\pi G\rho_0 r^2}{3}\right] \tag{2.57}$$

[3] $r < r_0$

Intgrando ora dalla superficie della stella – dove $p = 0$ – verso l'interno, si ottiene

$$\frac{p(r) + \rho_0}{3p(r) + \rho} = \left[\frac{3 - 8\pi G\rho_0 r_0^2}{3 - 8\pi G\rho_0 r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.57}$$

• Ricaviamo la $p(r)$ da quest'ultima equazione , ricordando che $\rho_0 = 3M/\left(4\pi r_0^3\right)$

$$p(r) = \frac{3M}{4\pi r_0^3}\left\{\frac{\left[1 - \frac{2MG}{r_0}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \frac{2MGr^2}{r_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \frac{2MGr^2}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}} - 3\left[1 - \frac{2MG}{r_0}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{2.58}$$

La funzione $A(r)$ si ricava immediatamente ponendo $\rho = \rho_0$ nella (2.50):

$$A(r) = \left[\frac{1 - 2MGr^2}{r_0^3}\right]^{-1} \tag{2.59}$$

mentre $B(r)$ si ottiene sostituendo la (2.58) nella (2.54) :

$$B(r) = \frac{1}{4}\left[3\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2MGr^2}{r_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{2.60}$$

In definitiva abbiamo che la metrica – con la condizione di densità uniforme – assume la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4}\left[3\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2MGr^2}{r_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dt^2 + \qquad (2.61) \\ &\quad - \left[\frac{1 - 2MGr^2}{r_0^3}\right]^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{aligned}$$

La (2.61) è la *soluzione di Schwarzschild interna* e descrive lo spazio interno ad una stella statica con densità costante.

2.5 Soluzione di Robertson-Walker

La soluzione di cui trattiamo ora deve verificare le seguenti ipotesi:

1 fluido perfetto

2 spazio massimamente simmetrico

3 assenza di campo elettromagnetico

Introduciamo ora il *Principio Cosmologico*

Proposizione 11 *ad un istante fissato l'universo è omogeneo ed isotropo su larga scala*

L'isotropia su larga scala impone che, fissato un qualsiasi punto P dell'universo, una generica trasformazione che fissi P lasci la metrica invariante: una qualsiasi pseudorotazione è una isometria.
L'omogeneità su larga scala richiede invece che qualsiasi pseudotraslazione sia un'isometria.
In un universo puramente spaziale ($t = costante$) a tre dimensioni, esistono tre pseudorotazioni e tre pseudotraslazioni indipendenti, ovvero

$$\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Il Principio cosmologico porta quindi a concludere che *l'universo è uno spazio massimamente simmetrico.*
La metrica dell'universo è quindi

$$ds^2 = R^2 \left[dy^2 + k \frac{(\vec{y} \cdot d\vec{y})^2}{1 - ky^2} \right] \tag{2.62}$$

Occorre però considerare anche la parte temporale della metrica ed uscire dall'ipotesi $t = t_0$. Vale a tale proposito il seguente Teorema

Teorema 12 *Sia N una varietà ed M un suo sottospazio massimamente simmetrico. Siano $\{u^i\}$ le coordinate relative ad M e v^a le restanti coordinate. La metrica di N assumerà la forma*

$$ds^2 = g_{ab}\,(v)\,dv^a dv^b + f\,(v)\,g_{ij}\,(u)\,du^i du^j \tag{2.63}$$

Nel nostro caso sarà quindi

$$ds^2 = g_{00}\,(t)\,dt^2 + R^2\,(t) \left[dy^2 + k \frac{(\vec{y} \cdot d\vec{y})^2}{1 - ky^2} \right] \tag{2.64}$$

Con un opportuno cambiamento di coordinate è possibile ottenere

$$g_{00}\,(t') = -1$$

Si ha così la canonica espressione della metrica di *Robertson-Walker*

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[dy^2 + k\frac{(\vec{y}\,d\vec{y})^2}{1-ky^2}\right] \tag{2.65}$$

o in cooerdinate sferiche polari

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{2.66}$$

La metrica così ottenuta è una metrica *comobile* perché permette di considerare l'universo come uno spazio con geometria invariante, a meno della scala. E' per questo che $R(t)$ si dice *Fattore di scala*
Dallo studio del red-shift si ottiene che $\dot{R}(t) > 0$. L'universo ha quindi la geometria di S^n $(k=1)$ di H^n $(k=-1)$ o di R^n $(k=0)$ in continua espansione.

La metrica di Robertson-Walker è stata ottenuta senza l'uso delle equazioni di Einstein. È quindi necessario verificare che la (2.66) sia effettivamente una delle soluzioni cercate.

Ricaviamo innanzitutto le componenti del tensore metrico

$$g_{00} = -1 \quad g_{0i} = 0 \quad g_{ij} = R^2(t)\ \tilde{g}_{ij}(\vec{y})$$

dove

$$\tilde{g}_{11} = \left(1-kr^2\right)^{-1} \quad \tilde{g}_{22} = r^2 \quad \tilde{g}_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

Si ricavano ora i simboli di Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= R\dot{R}\tilde{g}_{ij} \qquad\qquad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{R}}{R}\delta^i_j \\
\Gamma^i_{kj} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\ il}\left(\partial_k\tilde{g}_{lj} + \partial_j\tilde{g}_{kl} - \partial_l\tilde{g}_{jk}\right) = \tilde{\Gamma}^{\ i}_{jk}
\end{aligned}$$

da cui si ottengono le componenti del tensore di Ricci

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{3\ddot{R}}{R} \qquad\qquad R_{0i} = 0 \\
R_{ij} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij}
\end{aligned}$$

Il modello utilizzato per l'universo su larga scala è lo stesso che viene usato per i fluidi perfetti. Questo fatto porta a due considerazioni:

- lo studio fatto finora sull'universo ha valore per un qualsiasi fluido perfetto
- per completare le equazioni di Einstein possiamo utilizzare il tensore energia momento dei fluidi perfetti

In questo caso $p = p(t)$ e $\rho = \rho(t)$. Inoltre si ha che $u^0 = 1 \quad u^i = 0$.
Contraendo con $g^{\mu\nu}$ le equazioni di Einstein , si ottiene[4]

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Chiamando

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T$$

si ha che

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{1}{2} (\rho + 3p) \\ S_{i0} &= 0 \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} (\rho - p) R^2 \widetilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

Sostituendo quanto ottenuto nelle equazioni di Einstein si ottiene che

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \pi G (\rho + 3p) \tag{2.67}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{k - \dot{R}^2}{R^2} = 4\pi G (\rho - p) \tag{2.68}$$

Le equazioni ottenute non sono però funzionalmente indipendenti perché legate dalle identità di Bianchi

$$\frac{d(R^3 \rho)}{dR} = -3pR^2$$

Possono perciò essere unificate nell'*Equazione di Friedman*

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \tag{2.69}$$

[4] $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$

2.6 Soluzione di Reissner-Nordström

Calcoliamo ancora una soluzione che risponde alle seguenti ipotesi:

1 spazio vuoto
2 simmetria sferica
3 stazionarietà
4 presenza di campo elettromagnetico

L'ipotesi 2 ci permette ancora di utilizzare come punto di partenza la metrica (2.5) che, corretta con l'ipotesi 3, diventa

$$ds^2 = -B(r)\,dt^2 + A(r)\,dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Il tensore energia momento da utilizzare sarà quello elettromagnetico

$$T_{\nu\rho} = -F^{\mu}_{\nu}F_{\mu\rho} + \frac{1}{4}F_{\mu\sigma}F^{\mu\sigma}g_{\nu\rho}$$

Possiamo ancora utilizzare le espressioni già calcolate dei simboli di Christoffel, da cui si ricavano i tensori di Ricci e lo scalare di curvatura. Le equazioni di Einsteindiventano ora

$$-\frac{1}{rA}\left(\frac{B'}{B} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^1_1 \qquad (2.70)$$

$$-\frac{1}{rA}\left(\frac{1}{r} - \frac{A'}{A}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^0_0 \qquad (2.71)$$

$$\frac{1}{2AB}\left(-B'' - \frac{B'^2}{2B} - \frac{B'}{r} + \frac{A'B}{rA} + \frac{A'B'}{2A}\right) = 8\pi G T^2_2 = 8\pi G T^3_3 \qquad (2.72)$$

$$8\pi G T^{\mu}_{\nu} = 0 \qquad \mu \neq \nu \qquad (2.73)$$

L'ipotesi di simmetria impone che l'unica componente non nulla del tensore di campo elettromagnetico sia[5] F_{01}. Dall'ipotesi di stazionarietà consegue che

$$F_{01} = -F_{10} = E(r) \qquad (2.74)$$

[5]Ciò deriva dalla definizione del tensore di campo elettromagnetico: $F^{0i} = E^i \quad F^{ij} = \varepsilon^{ij}_k B^k$ con i,j,k$\neq 0$ e $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ tensore di Levi-Civita.

Si tratta ora di utilizzare le equazioni del campo elettromagnetico:

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \tag{2.75a}$$
$$\nabla_{\mu}F^{\nu\mu} = J^{\nu} \tag{2.75b}$$

dove J^{ν} è la corrente del campo.
Se poniamo nella (2.75b) $\nu = 0$ otteniamo

$$\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}F^{0\mu}\right) = \sqrt{-g}J^{0}$$

che per la (2.74) diventa

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\sqrt{\frac{1}{AB}}E\right) = -r^2\sqrt{AB}J^0$$

Integrando si ottiene

$$r^2\sqrt{\frac{1}{AB}}E = -\int_0^{r_0} r^2\sqrt{AB}J^0 dr \qquad r > r_0 \tag{2.76}$$

dove r_0 è il raggio minimo per cui il tensore energia momento della materia è nullo. Calcolando l'integrale si dimostra che il secondo membro equivale a q , carica elettrica della sorgente del campo (contenuta nella sfera di centro $r = 0$ e raggio r_0).

In conclusione

$$E(r) = \frac{q}{r^2}\sqrt{A(r)B(r)} \tag{2.77}$$

Questo risultato e la (2.74) portano a

$$T^{00} = T^{11} \tag{2.78}$$

Torniamo ora alle equazioni di Einstein. La (2.70) e la (2.71) danno con la (2.78)

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 8\pi GrA\left(T_{11} - T_{00}\right) = 0$$

che equivale a

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \tag{2.79}$$

La (2.77) diventa ora

$$E(r) = \frac{q}{r^2} \tag{2.80}$$

e la (2.76) si trasforma in

$$B(r) = 1 + \frac{2}{r}\left(GM_s + \beta\frac{Q^2}{r_0}\right) - \frac{Q^2}{r^2} \tag{2.81}$$

dove

$$\begin{aligned} M_s(r_0) &= -4\pi \int_0^{r_0} r' \, T^{00}_{massa} \, dr' \\ \beta &= costante \\ Q^2 &= Gq^2 \end{aligned}$$

Definendo ancora la grandezza

$$M = M_s(r_0) + \frac{\beta q^2}{r_0}$$

si trova l'espressione finale della metrica di Reissner-Nordström

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.82}$$

Dimostrando ancora che M non è altro che la massa interna alla sorgente, risulta evidente che la soluzione di Schwarzschild è un caso particolare della metrica appena trovata .

La (2.82) è singolare , oltre che nell'origine, per

$$r = r_{1,2} = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - Q^2} \tag{2.83}$$

se $(GM)^2 - Q^2 > 0$.

Si può verificare che l'unica singolarità effettiva della metrica di Reissner-Nordström è quella in $r = 0$.