UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Facoltà di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Incollamento di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein

Relatori:
Prof. Mauro Francaviglia
Prof. Marco Ferraris

Candidato: Enrico Gasco

Luglio 1998

Indice

Capitolo 1

CENNI DI RELATIVITÀ

1.1 Il Principio di equivalenza

La *Meccanica Classica* descrive la fisica in termini di eventi situati in un ambiente geometrico di tipo euclideo. Si tratta generalmente di uno spazio-tempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ dotato di metrica piatta di segnatura (3,0) sui sottospazi $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$. Le leggi della meccanica classica sono inoltre invarianti per trasformazioni del gruppo di Galilei.

L'*Elettromagnetismo* invece è descritto da una sistema di equazioni che cambiano forma nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Per riottenere la covarianza delle leggi fisiche si ricorre alla *Relatività Speciale* che postula la costanza della velocità della luce e utilizza il gruppo di trasformazioni di Lorentz. Così facendo si passa ad uno spazio-tempo ancora piatto ma con metrica di tipo Minkowskiano, di segnatura (1,3).

Il punto di vista della *Relatività Generale* è completamente diverso: gli eventi fisici non si limitano a vivere nello spazio geometrico, ma ne provocano una sostanziale deformazione. Questo approccio è giustificato dal
PRINCIPIO DI EQUIVALENZA: *gli effetti di un campo gravitazionale uniforme sono identici agli effetti di un'accelerazione del sistema di riferimento.*

Le forze inerziali possono essere descritte in termini di deformazione della geometria. Si tratta di deformazioni eliminabili tramite cambiamento di riferimento. Grazie al Principio di Equivalenza è possibile adottare anche per i campi gravitazionali una descrizione di tipo geometrico. Notiamo però che i campi gravitazionali non sono, generalmente, uniformi. Dunque il Principio di Equivalenza ha valore solo in prima approssimazione. Questo significa che la deformazione della geometria - a differenza del caso inerziale - non è eliminabile per cambiamento di riferimento, se non a livello locale.

1.2 Modello Geometrico della Relatività Generale

L'ambiente geometrico più idoneo alla descrizione dei fenomeni gravitazionali è una *varietà pseudo-riemaniana* M di dimensione 4 e di classe C^2.

In ogni punto della varietà è possibile costruire uno *spazio tangente* TM su cui è definita una base $\vec{e}_\mu = \partial_\mu$ ed uno *spazio cotangente* T^*M con relativa base $\underset{\rightarrow}{e}^{\nu} = dx^\nu$, con $\mu, \nu = 0...3$.

Sullo spazio-tempo M è definito un *tensore metrico* g simmetrico, non degenere, di segnatura (1,3). Il tensore metrico definisce un prodotto scalare tra due vettori:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = g(\vec{v}, \vec{w}) = g(v^\mu \vec{e}_\mu, w^\nu \vec{e}_\nu) =$$

$$v^\mu w^\nu g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = v^\mu w^\nu g_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

dove

$$g_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \tag{1.2}$$

A partire dalla definizione di g si deginisce il *tensore metrico inverso* g^{-1}, che ha componenti $g^{\mu\nu}$ tali che:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{1.3}$$

Il tensore metrico permette di definire in ogni punto di M un isomorfismo tra lo spazio tangente e lo spazio cotangente attraverso la seguente regola:

$$^{\#}(\vec{v})(\vec{w}) = g(\vec{v}, \vec{w}) = \ ^{\#}(\vec{w})(\vec{v})$$

In coordinate locali si ha

$$(v^\mu \partial_\mu)^{\#} = \sigma_v dx^\nu$$

dove

$$\sigma_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu = v_\nu$$

Poiché generalmente le componenti di $\vec{v}$ e quelle di $\underset{\to}{\sigma}$ si indicano con lo stesso nome, questo isomorfismo si dice *abbassamento degli indici*. La funzione inversa, detta *innalzamento degli indici*, si definisce analogamente come isomorfismo tra T^*M e TM in ogni punto tramite la relazione

$$\underset{\to}{\omega}^\flat(\sigma) = g({}^\flat(\underset{\to}{\omega}),{}^\flat(\underset{\to}{\sigma})) = \underset{\to}{\sigma}^\flat(\underset{\to}{\omega})$$

In coordinate si ha

$$(\sigma_\nu dx^\nu)^\flat = v^\mu \partial_\mu$$

dove

$$v^\mu = g^{\mu\nu} \sigma_\nu = \sigma^\mu$$

Analogamente il prodotto per il tensore metrico, o per il suo inverso, stabilisce isomorfismi anche tra spazi tensoriali di generico ordine (r,s) e (r-1,s+1).

1.2.1 La Connessione Affine

Definiamo come *connessione affine* ∇ su M la mappa[1] $\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \tag{1.4a}$$
$$\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \tag{1.4b}$$
$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \tag{1.4c}$$
$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \tag{1.4d}$$

dove $f \in F(M)$ e $X, Y, Z \in X(M)$.

Data una base $\vec{e}_\mu = \partial_\mu$ su M è possibile definire un'insieme di funzioni $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, chiamate *coefficienti di connessione* individuate da

$$\nabla_\mu e_\nu \equiv \nabla_{e_\mu} e_\nu = e_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

[1] $X(M)$ è l'insieme dei campi vettoriali definiti su M

Esse permettono di specificare come cambiano i vettori della base da punto a punto. Una volta che sia stata definita l'azione di ∇ sui vettori della base, è possibile calcolare l'azione di ∇ su un qualsiasi vettore. Siano $V = V^\mu e_\mu$ e $W = W^\nu e_\nu$ due vettori su M avremo

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu}(W^\nu e_\nu) = \\ &= V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) = \\ &= V^\mu \left(\partial_\mu W^\rho + W^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu}\right) e_\rho \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\nabla_\mu W^\rho = \partial_\mu W^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} W^\nu \tag{1.6}$$

che è l'espressione della derivata covariante di un vettore, espressa in componenti.

Nota la connessione affine si può definire il *trasporto parallelo* di un vettore su M lungo una curva. Sia allora $c : (a, b) \to M$ una curva su M e X un campo vettoriale definito lungo $c(t)$,

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t)) e_\mu|_{c(t)}$$

Se X soddisfa alla condizione

$$\nabla_V X = 0 \tag{1.7}$$

si dice che X è trasportato parallelamente lungo la curva $c(t)$ dove $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt) e_\mu|_{c(t)}$ è il vettore tangente alla curva. In componenti l'equazione (1.7) si scrive

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} X^\rho = 0$$

Se è lo stesso vettore V tangente alla curva a soddisfare la(1.7)allora la $c(t)$ è una *geodetica* In componenti l'equazione diviene

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

dove $\{x^\mu\}$ sono le coordinate di $c(t)$.

Una definizione equivalente chiama *geodetica* la curva di lunghezza estrema che unisce due punti $P = c(t_1)$, $Q = c(t_2)$, ovvero una curva tale che

$$\delta l = 0$$

dove

$$l = \int_P^Q dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt$$

$$\begin{aligned} \delta l &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \delta x^\nu \right) ds + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2 x^\rho}{dt^2} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) g_{\rho\nu} \delta x^\nu dt = \\ &= \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \delta x^\nu \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2 x^\rho}{dt^2} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} \right) g_{\rho\nu} \delta x^\nu dt = 0 \end{aligned}$$

Poiché per la proprietà delle variazioni il primo termine si annulla, si ottiene di nuovo l'equazione (1.8).

Le geodetiche in Relatività Generale sono importanti perchè descrivono il moto inerziale di corpi materiali sullo spazio-tempo M.

Richiediamo ora che la derivata covariante della metrica $g_{\mu\nu}$ sia costante. In termini geometrici questo equivale a chiedere l'invarianza del prodotto interno fra due vettori per trasporto parallelo. Dato un vettore V tangente ad una curva c , lungo cui si compie il trasporto parallelo dei due vettori X ed Y, avremo

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_V \left[g\left(X, Y\right) \right] = \\ &= V^\kappa \left[\left(\nabla_\kappa g \right) \left(X, Y \right) + g\left(\nabla_\kappa X, Y \right) + g\left(X, \nabla_\kappa Y \right) \right] = \\ &= V^\kappa X^\mu Y^\nu \left(\nabla_\kappa g \right)_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$. Poiché ciò è vero per ogni curva e per qualsiasi vettore, dovremo avere

$$\left(\nabla_\kappa g \right)_{\mu\nu} = 0 \tag{1.9}$$

che sviluppando dà

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} = 0 \tag{1.10}$$

Se la condizione (1.9) è verificata si dice che la ∇ è una *connessione metrica*. Permutiamo ciclicamente la (1.10) negli indici (λ, μ, ν) otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^k_{\mu\nu} g_{k\lambda} - \Gamma^k_{\mu\lambda} g_{k\nu} &= 0 \\ \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^k_{\nu\lambda} g_{k\mu} - \Gamma^k_{\nu\mu} g_{k\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Ricaviamo così con l'aiuto della (1.10)

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T^{k\kappa}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - 2\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} = 0 \tag{1.11}$$

dove $T^\kappa_{\lambda\mu} = 2\Gamma^\kappa_{[\lambda\mu]}$ è la *torsione*. Risolvendo la(1.11) rispetto a $\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)}$ si ottiene

$$\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} = \left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\} + \frac{1}{2} \left(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu \right)$$

dove $\left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\}$ sono i *simboli di Christoffel* definiti da

$$\left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{1.12}$$

I coefficienti di connessione sono dati da

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} &= \Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} + \Gamma^\kappa_{[\mu\nu]} = \\ &= \left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\} + \frac{1}{2} \left(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T^\kappa{}_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Se la torsione è *nulla* - condizione sempre valida in Relatività Generale - la connessione si dice di *Levi-Civita*. A tale proposito vale il seguente teorema

Teorema 1 *Su una varietà (pseudo-)Riemanniana (M,g) esiste un'unica connessione simmetrica– la torsione è nulla - che sia compatibile con la metrica g. Il suo nome è connessione di Levi-Civita.*

Poniamoci d'ora in avanti nel dominio di questo teorema.

1.2.2 Il tensore di curvatura e di torsione

Definiamo il *tensore di torsione* $T : X(M) \otimes X(M) \to X(M)$ e il *tensore di curvatura* $R : X(M) \otimes X(M) \otimes X(M) \to X(M)$ nella maniera seguente

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1.14a}$$
$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.14b}$$

Le componenti si ottengono facendoli agire sulla base di vettori $\{e_\mu\}$ e di uno-forme $\{dx^\mu\}$ della varietà

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= < dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) > = < dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu > \\ &= < dx^\lambda, \Gamma^\eta_{\mu\nu} e_\eta - \Gamma^\eta_{\nu\mu} e_\eta > = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{1.15}$$

e

$$\begin{aligned} R^k_{\lambda\mu\nu} &= < dx^k, R\left(e_\mu, e_\nu, e_\lambda\right) > = < dx^k, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda > \\ &= < dx^k, \nabla_\mu \left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda} e_\eta\right) - \nabla_\nu \left(\Gamma^\eta_{\mu\lambda} e_\eta\right) > \\ &= < dx^k, \left(\partial_\mu \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\right) e_\eta + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\zeta_{\mu\eta} e_\zeta - \left(\partial_\nu \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\right) e_\eta - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\zeta_{\nu\eta} e_\zeta > \\ &= \partial_\mu \Gamma^k_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^k_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^k_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^k_{\nu\eta} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ricordiamo in sintesi le proprietà del tensore di Riemann:

$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = -R^\mu_{\nu\sigma\rho}$

$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}$

$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$

$R^\mu_{[\nu\rho\sigma]} = 0$

Le componenti indipendenti di questo tensore sono quindi $\frac{1}{12}\left(n^2\left(n^2-1\right)\right)$ dove $n = dim(M)$. Nel nostro caso essendo n=4, saranno 20.

Le equazioni (1.16) e (1.15) sono l'espressione in componenti della 2-forma di curvatura e della 2-forma di torsione, le cui espressioni sono[2][3]

$$R^\mu_\nu = d\Gamma^\mu_\nu + \Gamma^\mu_\sigma \wedge \Gamma^\sigma_\nu \tag{1.17}$$
$$T^\mu = -\Gamma^\mu_\nu \wedge dx^\nu \tag{1.18}$$

[2] Il simbolo $\wedge$ denota il *prodotto esterno*. Date due 1-forme $\omega, \sigma \in T^*M, \forall v, w \in TM$

$$(\omega \wedge \sigma)(v, w) = \det \begin{pmatrix} \omega(v) & \omega(w) \\ \sigma(v) & \sigma(w) \end{pmatrix}$$

La definizione del prodotto esterno tra una k-forma euna h-forma si ottiene in maniera costruttiva dalla defizione precedente.

[3] d è il *differenziale esterno*. E' definito come $d : \omega^k \rightarrow \omega^{(k+1)} = d\left(\frac{1}{k!}\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \frac{1}{k!}\partial_j \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$

Dalla definizione derivano alcune proprietà:

$d\left(\alpha\omega^k + \beta\omega^k\right) = \alpha d\omega^k + \beta d\omega^k \qquad \forall \alpha, \beta \in R$

Combinando le due si ottiene la *I identità di Bianchi*

$$dR^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\sigma} \wedge \Gamma^{\sigma}_{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma} \wedge R^{\sigma}_{\nu} \tag{1.19}$$

ovvero

$$\nabla R^{\mu}_{\nu} = 0$$

Sviluppando secondo le basi della 2-forma di curvatura si ricava la I° identità di Bianchi in componenti:

$$\nabla_{\alpha} R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\mu}_{\nu\sigma\alpha} + \nabla_{\sigma} R^{\mu}_{\nu\alpha\rho} = 0 \tag{1.20}$$

Differenziando la (1.18) si ha

$$dT^{\mu} = -d\Gamma^{\mu}_{\nu} \wedge dx^{\nu}$$

da cui – combinando con la (1.17) – si ottiene

$$dT^{\mu} = -R^{\mu}_{\nu} \wedge dx^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma} \wedge \Gamma^{\sigma}_{\nu} \wedge dx^{\nu}$$

cioé la *II° identità di Bianchi* :

$$dT^{\mu} = -R^{\mu}_{\nu} \wedge dx^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma} T^{\sigma} \tag{1.21}$$

Per varietà a torsione nulla si ha

$$R^{\mu}_{\nu} \wedge dx^{\nu} = 0$$

che espressa in componenti porta a

$$R^{\mu}_{[\nu\rho\sigma]} = 0 \tag{1.22}$$

$d\left(\omega^{k} \wedge \omega^{h}\right) = d\omega^{k} \wedge \omega^{h} + (-1)^{k}\, \omega^{k} \wedge d\omega^{h}$

$df = \partial_{\alpha} f\, dx^{\alpha}$

$d^{2} = 0$

1.2.3 Vettori di killing

Una funzione $f : M \to M$ si dice *isometria* se lascia la metrica invariante in forma, ovvero

$$f^*(g) = g \tag{1.23}$$

(f^* è la controimmagine attraverso f). La definizione data è di tipo globale. Se l'uguaglianza vale solo localmente, f si dice *isometria locale*.
Dato un campo vettoriale $\vec{\xi} = \xi^\mu \partial_\mu$, si definisce su M una famiglia di curve $\gamma_p(t)$ dette *curve integrali*. Tali curve sono tangenti in ogni punto P della varietà al vettore $\vec{\xi}(p)$ del campo. Si definisce *flusso del campo* $F_{\vec{\xi}}(t, P) = \gamma_P(t)$.
Se $\varphi_t(P) = F_{\vec{\xi}}(t, P)$ si definisce *derivata di Lie* di un campo tensoriale T lungo il campo $\vec{\xi}$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\,(T)\,|_{t=0} = \mathcal{L}_{\vec{\xi}}T \tag{1.24}$$

La funzione $\varphi_t(P) = F_{\vec{\xi}}(t, P)$ indotta dal campo vettoriale $\vec{\xi}$ è quindi un'isometria (almeno locale) se $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, g = 0$.
Si calcola che

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, g\right)_{\mu\nu} = \xi^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma}\nabla_\nu \xi^\sigma + g_{\sigma\nu}\nabla_\mu \xi^\sigma$$

Ma era

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

da cui risulta che

$$(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \tag{1.25}$$

Se vale l'uguaglianza

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}g = 0$$

$\vec{\xi}$ si dice *vettore di killing*, individuato dalle equazioni di Killing

$$\nabla_\rho \xi_\sigma + \nabla_\sigma \xi_\rho = 0 \tag{1.26}$$

Valgono le seguenti proprietà

Teorema 2 *Noti il tensore di curvatura $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ e i vettori ξ_σ e $\nabla_\rho \xi_\sigma$ in un punto x_0 della varietà, è possibile conoscere il valore di ξ_σ in ogni punto di un intorno di x_0.*

Corollario 3 *$\xi_\mu(x)$ è una combinazione lineare di $\xi_\mu(x_0)$ e di $\nabla_\sigma \xi_\rho(x_0)$:*

$$\xi_\mu(x) = A^\nu_\mu(x, x_0)\xi_\nu(x_0) + B^{\nu\sigma}_\mu(x, x_0)\nabla_\nu \xi_\sigma(x_0) \tag{1.27}$$

Corollario 4 *Il numero massimo di vettori di Killing indipendenti che possono esistere su una varietà di dimensione n è*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Si dice *spazio massimamente simmetrico* una varietà il cui numero di vettori di Killing è massimo, ovvero una varietà con $\frac{n(n+1)}{2}$ direzioni di simmetria linearmente indipendenti.

Una varietà M si dice *omogenea* se esiste un gruppo G – detto *gruppo di simmetria* – che agisce transitivamente su M.
L'azione di un gruppo G su di una varietà M si dice *transitiva* se $\forall P, Q \in M \quad \exists\, g \in G \ / \ g(P) = Q$. Dato un punto P appartenente ad una varietà omogenea M, si dice *sottogruppo di isotropia* H relativo al punto P, il sottogruppo di G tale che $\forall h \in H \subseteq M \quad h(P) = P$. Si tratta cioé del sottogruppo di G che fissa il punto P.

Valgono i seguenti teoremi

Teorema 5 *Sia M una varietà omocenea e siano G il gruppo di simmetria e H il sottogruppo di isotropia relativo ad un punto $P \in M$. Allora è*

$$M \approx G/H$$

Teorema 6 *tutte e sole le varietà Riemanniane omogenee sono quelle a curvatura costante , ovvero*

$$\begin{aligned}
&R^n \\
&S^n \approx SO\,(n+1) \ / \ SO\,(n) \\
&H^n \approx SO\,(n, 1) \ / \ SO\,(n)
\end{aligned}$$

Teorema 7 *la metrica di uno spazio massimamente simmetrico è*

$$ds^2 = R^2 \left[d\vec{y}^2 + k \frac{(\vec{y} \cdot d\vec{y})^2}{1 - k\vec{y}^2} \right]$$

dove $\{y^\alpha\}_{a=1...n}$ *sono le coordinate relative all'immersione in* R^{n+1} *e*

$$\begin{array}{ll} k = 0 & per\ R^n \\ k = 1 & per\ S^n \\ k = -1 & per\ H^n \end{array}$$

Teorema 8 *una varietà omogenea è uno spazio massimamente simmetrico*

1.3 Il Tensore Energia Momento

Per costruire le equazioni di Einstein sono necessari ingredienti geometrici – quali il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate – e ingredienti che descrivono i campi fisici. Si utilizzerà a tale scopo il *tensore energia-momento*, definito come risposta data dall'azione a variazioni del tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

Si calcola dapprima il *tensore energia momento del campo elettromagnetico.* L'azione del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è

$$S_{(em)} = -\frac{1}{4} \int_\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = -\frac{1}{4} \int_\Omega F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \sqrt{-g} d^4x \qquad (1.28)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e g indica il determinante della metrica.
Si tratta ora di variare S_{em} rispetto a $g_{\mu\nu}$.

$$\delta S_{(em)} = -\frac{1}{4} \int_\Omega F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \delta \left(g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x \qquad (1.29)$$

Si calcola che

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \qquad (1.30)$$

inoltre[4]

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \qquad (1.31)$$

[4]per ricavare questa uguaglianza si usa la formula

$$d(\det X) = (\det X)\, tr\left(X^{-1} dX\right)$$

Sostituendo nella(1.29) si ottiene

$$\delta S_{(em)} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[F^{\mu}_{\nu}F_{\mu\rho} - \frac{1}{4}F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right]\delta g^{\nu\rho}\sqrt{-g}d^4x \tag{1.32}$$

da cui si ricava il tensore energia momento del campo elettromagnetico

$$T^{(em)}_{\nu\rho} = -F^{\mu}_{\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}F_{\mu\sigma}F^{\mu\sigma}g_{\nu\rho} \tag{1.33}$$

Il *tensore energia-momento delle particelle massive* si calcola, analogamente, variando l'azione delle particelle massive rispetto a $g_{\mu\nu}$:

$$S_{(pm)} = \sum_i m_i \int_{\gamma_i} ds_i = \sum_i m_i \int_{\gamma_i}\sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}_i dx^{\nu}_i} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}\delta S_{(pm)} &= \sum_i m_i \int_{\gamma_i}\frac{\delta g_{\mu\nu}dx^{\mu}_i dx^{\nu}_i}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}dx^{\rho}_i dx^{\sigma}_i}} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \int_{\gamma_i}\delta g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}_i}{ds_i}\frac{dx^{\nu}_i}{ds_i}ds_i\end{aligned}$$

che equivale a

$$\delta S_{(pm)} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_i m_i\left(\int_{\gamma_i}\frac{dx^{\rho}_i}{ds_i}\frac{dx^{\sigma}_i}{ds_i}\delta^4\left(x - x^i\right)ds_i\right)\sqrt{-g}\delta g_{\rho\sigma}d^4x \tag{1.35}$$

da cui si ricava che il tensore energia-momento delle particelle massive è

$$-T^{\rho\mu}_{(pm)} = \sum_i m_i \int_{\gamma_i}\delta^4\left(x - x^i\right)\frac{dx^{\rho}_i}{ds_i}\frac{dx^{\mu}_i}{ds_i}ds_i \tag{1.36}$$

In un sistema di particelle massive in cui – oltre alle forze gravitazionali - agiscono solo forze elettromagnetiche, il tensore energia momento è

$$T_{\mu\nu} = T^{(pm)}_{\mu\nu} + T^{(em)}_{\mu\nu} \tag{1.37}$$

Si noti che – per la definizione data, in cui $T_{\mu\nu}$ risulta contratto con $\delta g_{\mu\nu}$ – il tensore energia-momento è simmetrico.

Talvolta è utile considerare l'universo – o parte di esso – come *fluido perfetto*. L'azione di un fluido perfetto è

$$S_{(pf)} = -\int_\Omega \rho\sqrt{-g}d^4x \tag{1.38}$$

Variando ancora rispetto a $g_{\mu\nu}$ si ottiene

$$\delta S_{(pf)} = -\int_\Omega \left(\delta\rho\sqrt{-g} + \rho\delta\sqrt{-g}\right) d^4x \tag{1.39}$$

La dinamica dei fluidi dimostra che[5]

$$\delta\rho = \frac{p+\rho}{2}\left(u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}$$

Utilizzando ancora la (1.31) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta S_{(pf)} &= -\int_\Omega \left[\frac{p+\rho}{2}\left(u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\rho g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(p+\rho)\,u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \end{aligned} \tag{1.40}$$

da cui si ricava il *tensore energia momento dei fluidi perfetti*

$$T^{\mu\nu}_{(pf)} = (p+\rho)\,u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \tag{1.41}$$

Proposizione 9 *Il tensore energia-momento ha tetradivergenza nulla.*

Per dimostrare questa proprietà bisogna fare ricorso al *Principio di Azione stazionaria* $\delta S = 0$ che dà

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int_\Omega T_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{1.42}$$

Sia la variazione di $g_{\mu\nu}$ legata alla relazione

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{1.43}$$

[5] p e ρ sono la pressione e la densità del fluido, mentre u^μ è la tetravelocità.

dove $\vec{\epsilon} = \epsilon^\mu \partial_\mu$ è un campo vettoriale sulla varietà.
Si calcola ora la derivata di Lie del tensore metrico rispetto al campo $\vec{\epsilon}$:

$$(\mathcal{L}_{\vec{\epsilon}}\, g)^{\mu\nu} = -2\nabla^{(\mu}\epsilon^{\nu)} \tag{1.44}$$

Sostituendo nella (1.42) si ha

$$\int_\Omega T_{\mu\nu}\nabla^{(\mu}\epsilon^{\nu)}\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{1.45}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\nabla_\mu \left(T^\mu_\nu \epsilon^\nu\right) - \left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right)\epsilon^\nu\right]\sqrt{-g}d^4x = \\ &\int_\Omega \left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(T^\mu_\nu \epsilon^\nu \sqrt{-g}\right)\right]\sqrt{-g}d^4x + \\ &- \int_\Omega \left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right)\epsilon^\nu \sqrt{-g}d^4x = 0 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Il primo integrale può essere trasformato – tramite il lemma di Gauss[6] – in

$$\int_{\partial\Omega} T^\mu_\nu \epsilon^\nu \sqrt{-g}d\sigma_\mu = 0 \tag{1.47}$$

Se Ω racchiude arbitrariamente tutto il sistema materiale considerato, si ha che sul bordo – totalmente esterno al sistema – $T^\mu_\nu = 0$, da cui si ottiene che l'integrale (1.47) è identicamente nullo.
Rimane quindi

$$\int_\Omega \left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right)\epsilon^\nu \sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{1.48}$$

Per l'arbitrarietà del dominio di integrazione e di ϵ^μ si ottiene

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{1.49}$$

[6] *Lemma di Gauss*

$$\int_\Omega \partial_\mu f^{\,\mu}\sqrt{-g}d^4x = \int_{\partial\Omega} f^{\,\mu}\sqrt{-g}d\sigma_\mu$$

dove $d\sigma_\mu = \partial_\mu \cdot d^4x = n_\mu d^3\sigma$.

1.4 Le Equazioni di Einstein

Le equazioni di Einstein mettono in relazione le proprietà geometriche dello spazio-tempo con il tensore energia momento. Si ricercano delle equazioni aventi la forma

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{1.50}$$

dove k è una costante di proporzionalità. E' necessario richiedere che

- $G_{\mu\nu}$ sia un tensore simmetrico perchè $T_{\mu\nu}$ lo è
- $G_{\mu\nu}$ contenga soltanto derivate di ordine 0,1,2 del tensore metrico e non contenga i campi materiali. La divergenza delle derivate seconde sia lineare.
- $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ dall'analoga proprietà di $T^{\mu\nu}$.

Gli unici tensori che verificano le prime due richieste sono tensori del tipo $aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + cg_{\mu\nu}$ con a,b,c costanti.

Per ottenere un tensore (0,2) che verifichi anche la terza richiesta utizziamo la I° identità di Bianchi (1.20) :

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau} + \nabla_\sigma R_{\nu\rho\tau\mu} + \nabla_\tau R_{\nu\rho\mu\sigma} = 0$$

da cui – saturando successivamente con $g^{\rho\tau}$ e con $g^{\sigma\upsilon}$ – si ottiene

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{1.51}$$

Il tensore $G_{\mu\nu}$ – detto *tensore di Einstein* – è quindi

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} \tag{1.52}$$

λ è la *costante cosmologica* e viene generalmente considerata nulla a causa dell'espansione osservata nel nostro universo. Resta da determinare la costante k. A questo scopo è necessario passare ad una approssimazione non relativistica e imporre la validità dell'*equazione di Poisson* [7]:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho G \tag{1.53}$$

[7] La velocità della luce non compare perché si suppone di aver scelto delle coordinate tali che c=1

dove Φ è il *potenziale gravitazionale* e G è la *costante di gravitazione di Newton.* Il valore che si ottiene è $k = 8\pi G$. Sostituendo nella (1.50) la (1.52) (con $\lambda = 0$) e il valore ottenuto per k, si ottiene la forma finale delle *equazioni di Einstein*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.54}$$

E' possibile ottenere le equazioni di Einstein anche tramite i metodi variazionali.
Definiamo l'*azione delle particelle massive*

$$S_{(pm)} = \sum_i m_i \int_{\gamma_i} dt_i$$

l'*azione del campo elettromagnetico*

$$S_{(em)} = -\frac{1}{4} \int_\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

l'*azione di interazione*[8]

$$S_{(int)} = \sum_i e_i \int_\Omega A_\mu \frac{dx_i^\mu}{dt_i} dt_i \tag{1.55}$$

e l'*azione gravitazionale*

$$S_{(g)} = -\frac{1}{16\pi G} \int_\Omega R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \tag{1.56}$$

Il Principio di Azione stazionaria impone che l'azione $S = S_{pm} + S_{em} + S_{int} + S_g$ debba essere estrema. Vediamo in particolare la variazione dell'azione rispetto al tensore metrico $g_{\mu\nu}$.
Si è già visto che

$$\delta \left(S_{(em)} + S_{(pm)} \right) = \frac{1}{2} \int_\Omega T_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \sqrt{-g} d^4x \tag{1.57}$$

Si calcola ora la variazione di $S_{(g)}$:

$$\delta S_{(g)} = -\frac{1}{16\pi G} \int_\Omega \delta \left(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x \tag{1.58}$$

[8] A_μ è il tetrapotenziale del campo elettromagnetico.

$\delta R_{\mu\nu}$ non dà contributo all'azione[9].
$\delta S_{(int)}$ è identicamente nulla perché $S_{(int)}$ non dipende da $g_{\mu\nu}$.

Calcolando la variazione degli altri fattori (cfr(1.33) e (1.36)) si ottiene, applicando il principio di azione, proprio la (1.54):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Le equazioni di Einstein sono dieci ($R_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ sono tensori simmetrici) in dieci incognite ($g_{\mu\nu}$ è anche simmetrico). Le $g_{\mu\nu}$ non sono però univocamente determinate perché le dieci equazioni non sono funzionalmente indipendenti. Infatti le identità di Bianchi lasciano solo sei equazioni funzionalmente indipendenti. Nella determinazione di $g_{\mu\nu}$ restano quindi quattro gradi di libertà. Per la ricerca di una soluzione è importante fissare una condizione non tensoriale che individui un sistema di riferimento particolare per ridurre l'indeterminazione.

[9]Per calcolare questo risultato si parte dalla 2-forma di curvatura, la cui variazione dà

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla \delta \Gamma^{\mu}_{\nu}$$

da cui - sviluppando in componenti e contraendo opportunamente gli indici - si calcola che

$$\delta R_{\nu\sigma} = \nabla_{\mu}\delta\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \nabla_{\sigma}\delta\,\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$$

da cui

$$\sqrt{-g}\,(\delta R_{\sigma\nu})\,g^{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\,\left(\nabla_{\sigma}\delta\,\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\delta\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\right)g^{\nu\sigma} =$$

$$= \partial_{\mu}\left(\delta\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}g^{\sigma\nu}\sqrt{-g}\right) - \partial_{\sigma}\left(\delta\,\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}g^{\sigma\nu}\sqrt{-g}\right)$$

Integrando si usa il lemma di Gauss. Per le proprietà delle variazioni , $\delta\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}$ calcolato su $\partial\Omega$ è nullo