

Il Principio di Mach: le prime considerazioni di Einstein (1907-12)

E. GASCO(*)

Einstein introduce il Principio di Mach nell'articolo "*Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*" del 1918 [1]. In esso esprime le correnti idee sulla gravità e conclude una lunga riflessione sull'origine dell'inerzia che ha occupato gli anni più fecondi della sua attività scientifica.

Questa riflessione affonda le radici nella lettura della *Meccanica nel suo sviluppo Storico-Critico* [2] di Ernst Mach ed in particolare in alcuni passi 'controversi' presenti nella disamina sull'esperimento del secchio di Newton, dove il filosofo austriaco sembra proporre l'esistenza di un legame causale fra le caratteristiche inerziali della materia e le altre masse stellari. Tale interpretazione ebbe un notevole successo nella comunità scientifica tedesca e numerosi fisici, fra i quali i fratelli Friedläender, Föppl, Hoffman ([3], [4], [5], [6]) e lo stesso Einstein, svilupparono le idee machiane sia da un punto di vista teorico che sperimentale. Rimane da chiedersi se questa interpretazione sia quella corretta, se in definitiva Mach abbia proposto un legame fra l'inerzia e le altre masse stellari e in caso affermativo per quale motivo non abbia approfondito la ricerca. Nelle pagine seguenti cercheremo di rispondere a queste domande e riproporremo alcune conclusioni di un precedente articolo ([7], [8]), arricchendole con una migliore interpretazione dei passi più equivoci.

Questi ultimi infatti assumono il loro corretto significato non solo alla luce della filosofia machiana – come avevamo mostrato nel suddetto articolo – ma anche tenendo a mente la tecnica della 'variazione' (o esperimento mentale) che Mach utilizza per portare alle estreme conseguenze le relazioni concettuali individuate. Discutendo ad esempio il rapporto fra moto relativo e moto assoluto, egli introduce alcune considerazioni equivoche che vanno esaminate nel particolare contesto in cui sono proposte e che non presentano alcuna valenza generale. Giungeremo infine alla duplice conclusione che Mach non propose alcun legame causale fra l'inerzia e le altre masse stellari ma che tale ipotesi è facilmente deducibile dai suoi ragionamenti e dalle sue convinzioni filosofiche.

E' questo infatti l'esito della riflessione einsteniana sull'opera di Mach: egli riconosce nei passi della *Meccanica* la 'congettura' del tutto generale di un legame fra l'inerzia di un corpo e la presenza delle altre masse stellari e ricerca un Principio Teorico che formalizzi questa ipotesi. Ci vollero diversi anni per giungere ad una formulazione completa del *Principio di Mach*, ma le prime considerazioni sulle idee machiane sono presenti già in una nota del 1912 [9] a seguito della preliminare teoria scalare della gravitazione (in essa cita il filosofo austriaco come fonte di ispirazione per la sua modellizzazione). Il breve saggio è di notevole interesse in quanto rappresenta il primo passo compiuto da Einstein per assiomatizzare le conclusioni di Mach sull'origine dell'inerzia.

(*) email: EnricoGasco@libero.it

L'obiettivo dunque di questo articolo è quello di proporre con maggior chiarezza la corretta interpretazione dei passi machiani più equivoci ed in secondo luogo mostrare come Einstein riconosca nelle considerazioni di Mach un principio cardine della nuova Teoria della Relatività Generale e quale sia il primo tentativo di modellizzare il rapporto fra inerzia e gravità.

1. La corretta interpretazione dei passi machiani sull'esperimento del secchio.

Le argomentazioni di Mach sull'esperimento del secchio e le conclusioni che ne discendono possono essere interpretate correttamente solo alla luce della filosofia machiana. Il programma filosofico di Mach è riassunto sostanzialmente in due obiettivi: il primo consiste nel tentativo di unificare la scienza senza alcun tipo di riduzionismo (fisicalistico o psicologistico); il secondo è rappresentato dall'eliminazione di ogni deriva metafisica presente nell'opera scientifica (si pensi ad esempio ai concetti newtoniani di spazio e tempo assoluti).

Al fine di realizzare questo programma, Mach introduce come pure entità metodologiche gli *elementi*: essi rappresentano un qualcosa né fisico, né psichico - in tal caso si ricadrebbe in una sorta di riduzionismo - ma una base *impersonale* per la costruzione del sapere scientifico. Gli elementi possono dar luogo ad entità fisiche, psichiche o fisiologiche, a seconda del loro utilizzo e della loro connessione. In questo modo la Fisica è quella particolare branca della conoscenza che si occupa del legame fra spazi, tempi, suoni, colori... mentre la fisiologia, per fare un altro esempio, è quella disciplina che studia le connessioni fra le relazioni fisiche e le parti che costituiscono il nostro corpo. Gli elementi rappresentano dunque il mezzo per raggiungere il primo obiettivo del programma machiano: l'unificazione delle varie discipline senza l'obbligo di ridurle l'un l'altra.

Rimane ora da chiarire quali caratteristiche appartengano alle connessioni. Mach si interessa all'argomento fin dai primi anni della sua ricerca storico-filosofica e già nell'opera del 1872 [10] ci fornisce una risposta che sarà da fonte e stimolo per tutti i suoi studi successivi. Al fine di criticare il riduzionismo esposto con grande precisione da Helmholtz [11], nel "*Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der arbeit*" egli studia la storia e l'origine del principio di conservazione del lavoro (oggi diremmo dell'Energia). Mach ritiene che il Principio sia alla base della ricerca di ogni grande naturalista del passato ⁽¹⁾ e, a partire dallo studio della sua applicazione nello sviluppo della Meccanica, ne fornisce una definizione del tutto generale. Mach riconosce che il Principio asserisce un qualcosa che tutti hanno sotto gli occhi: che i corpi di per sé non vanno verso l'alto e non compiono questo movimento in quanto violerebbero la dipendenza reciproca con le altre masse circostanti. In una forma meno legata alle considerazioni meccaniche, il Principio dell'assenza del Perpetuum mobile è il "*Principio dell'Universale Dipendenza della Natura*"; esso esprime "*il risultato dell'esperienza: gli elementi del mondo α , β , γ ... si presentano dipendenti gli uni dagli altri. L'esperienza insegna che gli elementi sensibili α , β , γ ... in cui il mondo può essere scomposto sono soggetti a variazioni e insegna anche che alcuni di questi elementi sono connessi ad altri, di modo che si presentino insieme e scompaiono insieme, o il presentarsi degli elementi di un tipo è legato allo scomparire degli elementi di un altro*". La conoscenza della dipendenza reciproca fra i fenomeni è dunque l'obiettivo di ogni sapere scientifico e toccherà alle varie discipline definire e misurare le connessioni di loro pertinenza. Se per indicare queste connessioni di fatti preferiamo utilizzare il termine 'causalità', precisiamo che Mach individua il Principio della

⁽¹⁾Stevin ad esempio lo considerò come una esperienza istintiva, il cui contrario è assurdo, e lo utilizzò nella determinazione delle leggi che si applicano al piano inclinato. In eguale misura Galileo concepisce lo stesso principio nella forma della legge secondo cui un corpo, in virtù della velocità acquisita nella caduta, si innalza alla medesima altezza; se ne serve nella trattazione del moto del pendolo e nella determinazione della legge di Inerzia. Anche i fratelli Bernoulli e Huygens utilizzarono il medesimo principio nello studio sulla conservazione della forza viva.

Universale Dipendenza con il Principio di Causalità.

Dal breve brano riportato concludiamo che le connessioni fra gli elementi sensibili soddisfano due caratteristiche essenziali: (1) ogni elemento è in mutua relazione con ogni altro; (2) la connessione è funzionale e non causale, nel senso che un dato fenomeno non può essere valutato come *effetto* di una *causa*, ma come espressione della mutua relazione con tutti gli altri elementi. Il secondo punto specifica inoltre quale debba essere l'obiettivo della ricerca scientifica: la *descrizione* delle relazioni che intercorrono fra gli elementi sensibili in cui è scomposta l'esperienza. Quest'ultima rappresenta il cardine della visione filosofica di Mach: essa ci *deve essere fornita* e nostro compito è quello di descriverla con un modello funzionale. Non dobbiamo in alcun modo cercare qualcosa che superi i dati ricavati dalla sensibilità, in quanto rischieremo di concepire entità e relazioni fittizie che non hanno riscontro nella natura.

Consideriamo ora come Il Principio della Universale Dipendenza manifesti il suo contenuto nei fondamenti della Meccanica e in particolare volgiamo lo sguardo alla critica machiana ai concetti di spazio e tempo assoluti.

A differenza di Newton che riteneva il tempo indipendente dalla coscienza umana, quindi come un qualcosa non direttamente osservabile (almeno per quanto riguarda il *tempo vero*), Mach considera questo concetto come una nozione istintiva scaturita dallo stretto rapporto esistente fra il contenuto della nostra memoria e la percezione sensibile. Da questo rapporto intimo con la nostra coscienza nasce quella sensazione di assolutezza e di inutilità degli oggetti esterni tipica della definizione newtoniana ⁽²⁾. In realtà quando affermiamo che un oggetto A muta nel tempo, stiamo confrontando gli stati di A con quelli di un altro oggetto B preso come campione (ad esempio la terra con il suo moto di rivoluzione): in questo modo gli oggetti esterni acquistano significato nelle misurazioni temporali e dunque il trascorrere del tempo diviene un'espressione della dipendenza reciproca dei fenomeni naturali.

Ragionamenti analoghi si hanno anche nella critica allo spazio assoluto. La meccanica newtoniana considera la presenza di una accelerazione come l'allontanamento da uno stato privilegiato (l'inerzia) e spiega questo comportamento con l'introduzione di una forza. Il moto inerziale è accompagnato dalla scelta di un preciso sistema di riferimento – quello inerziale – che è la rappresentazione in fisica dello spazio assoluto. Ma per quale motivo descrivere il moto di un corpo in funzione di un'entità del tutto astratta, quando risulta più semplice ed immediato riferirlo agli stessi corpi dell'universo? Essi rappresentano l'unica maniera affidabile per individuare un corretto sistema di riferimento. Il moto dunque non viene agganciato ad un sistema assoluto come proponeva Newton – anche se spesso lo associava al sistema delle stelle fisse come ci ricorda lo stesso Mach – ma all'insieme di corpi rispetto a cui si valuta il moto. Un sistema di riferimento, a parere di Mach, è un'astrazione o una descrizione abbreviata dell'insieme di corpi rispetto a cui si rappresenta il moto. Lo studio del movimento si riduce dunque alla “descrizione” della dipendenza naturale che lega il corpo in moto e l'insieme di masse rispetto a cui è considerato.

Tenendo a mente la breve critica appena riportata ai fondamenti della Meccanica, siamo in possesso degli strumenti necessari per comprendere ed interpretare in modo corretto le importanti considerazioni di Mach sull'esperienza del secchio ⁽³⁾. Newton si servì di questa esperienza e della osservazione diretta di un'accelerazione centrifuga nel liquido in rotazione – il fatto discriminante nel suo ragionamento – per dimostrare l'esistenza di un moto assoluto. A questa argomentazione Mach risponde notando che la rotazione assoluta dell'acqua è in realtà una rotazione relativa all'insieme delle stelle fisse; esse rappresentano il corretto sistema di riferimento rispetto a cui valutare il moto. In questo modo l'accelerazione perde il carattere

⁽²⁾Non siamo consapevoli del fatto che le nostre misure temporali non possono prescindere dal moto di 'oggetti esterni'

⁽³⁾Si confronti per un'esame dettagliato delle interpretazioni dei passi machiani i saggi [12], [7], [8]

assoluto che presenta nella trattazione newtoniana e assume quella caratteristica relativa che appartiene già al concetto di velocità. Per Mach non esistono moti assoluti, il concetto è un residuo metafisico, ed in natura sono presenti solo moti relativi. Le accelerazioni, in particolare quelle inerziali, dipendono ora dall'insieme di corpi rispetto a cui si valuta il moto e dunque, in ultima analisi, la stessa inerzia dipende dalla presenza delle altre masse. A questa conclusione si giunge anche considerando le *connessioni* riscontrate nell'esperienza. Nel nostro caso il sistema è costituito dall'acqua contenuta nel vaso e dall'insieme delle stelle fisse; esso interagisce generando la presenza di accelerazioni centrifughe nell'acqua. Tenendo a mente che la *descrizione* del fenomeno osservato deve essere *funzionale*, si deduce che la presenza degli effetti inerziali non è ricondotta ad una causa occulta (o riferita ad uno spazio assoluto non osservabile), ma è il risultato della mutua interazione (della connessione) fra gli elementi appartenenti al sistema. Questa influenza reciproca viene espressa in una forma più *generale* – abbandonando il particolare esperimento da cui è scaturita – con la ‘congettura’ secondo cui l'inerzia di un corpo dipende in qualche misura dalla presenza delle altre masse e quindi, in ultima analisi, è un caso limite della gravitazione.

L'ultimo passaggio, sebbene facilmente deducibile dalle considerazioni sull'esperimento del secchio, non fu mai compiuto da Mach, in quanto l'obiettivo principale dell'opera machiana fu quello di espungere dalla Meccanica i concetti metafisici, quali lo spazio assoluto, e di descrivere in modo funzionale l'esperienza data. La generalizzazione compiuta invece è una speculazione che oltrepassa la particolare esperienza presa in esame e quindi rischia di essere una congettura non direttamente osservabile.

Per comprendere pienamente le idee di Mach sull'inerzia e per giungere ad una loro corretta interpretazione è opportuno prendere in esame i passi più equivoci legati all'esperimento del secchio. Ne analizzeremo in particolare due, i più discussi, e specifichiamo subito che in entrambi Mach utilizza alcuni ragionamenti di difficile interpretazione. Come considerazione preliminare notiamo che egli adotta il metodo della ‘variazione’ (o esperimento mentale) al fine di controllare, modificando alcune caratteristiche, la validità delle relazioni concettuali messe in evidenza.

Nella *prima* argomentazione Mach sostiene che tutti i moti naturali sono ‘moti relativi’ (anche i concetti ad essi associati, quali quello di forza) e chi si fa convincere dell'esistenza di moti veri non tiene a mente che il medesimo fenomeno può essere descritto anche in modo differente (sempre con termini relativi). Il comportamento della terra, ad esempio, viene descritto sia dalla teoria copernicana sia da quella tolemaica; le due descrizioni sono entrambe corrette, solo che la prima è più economica e pratica della seconda. E' a questo punto che Mach compie la ‘variazione’: come nel caso del comportamento della Terra, in cui si considera il pianeta immobile o in moto a seconda della descrizione utilizzata, così nell'esperimento del secchio è lecito considerare il vaso in rotazione e la volta stellata immobile, oppure il secchio fermo e le stelle fisse in moto rotatorio. Egli infatti afferma, modificando le condizioni dell'esperienza newtoniana, “*Si cerchi di tener fermo il vaso newtoniano, di far ruotare il cielo delle stelle fisse e di verificare l'assenza delle forze centrifughe.*” Ecco che si compie una nuova descrizione dell'esperimento. Il passo non rappresenta la proposta di una nuova esperienza, che se compiuta (anche se irrealizzabile) porti ad ottenere forze centrifughe dovute al moto rotatorio della volta stellata, ma l'espressione di una differente descrizione del medesimo fenomeno.

Poco più avanti Mach trae le conclusioni della critica all'esperienza del secchio (la *seconda* argomentazione). Egli afferma “*L'esperimento newtoniano del vaso pieno d'acqua sottoposto a moto rotatorio ci insegna solo che la rotazione relativa dell'acqua rispetto alle pareti [in corsivo] del vaso non produce forze centrifughe percettibili, ma che tali forze sono prodotte dal moto rotatorio relativo alla massa della terra e agli altri corpi celesti*”. In esso vi sono alcuni termini, come ‘produce’ e ‘prodotte’, di chiara valenza causale che portano ad una prima inter-

pretazione in cui le stelle fisse presentano una qualche influenza causale nella determinazione delle accelerazioni centrifughe. Tenendo a mente il Principio della Universale Dipendenza, che rappresenta per Mach il vero Principio di Causalità, dobbiamo scartare questa interpretazione perché rischieremo di introdurre una causa occulta per spiegare le accelerazioni inerziali, mentre ci dobbiamo limitare a descrivere in termini funzionali l'esperienza osservata. Nel passo indicato Mach descrive a parole il dato dell'esperienza: le accelerazioni inerziali sono in relazione alla massa della terra e a quella delle stelle fisse, quindi alle masse più lontane, mentre non hanno alcun effetto le pareti del secchio, quindi le masse più vicine. In seguito egli compie la 'variazione' e si domanda se sia corretta questa relazione di concetti: che cosa succederebbe se le pareti del vaso divenissero via via più massicce fino ad uno spessore di qualche miglio? Il moto rotatorio del vaso indurrebbe forze centrifughe nell'acqua? Varrebbe ancora la relazione indicata, dove l'inerzia è determinata dalle masse lontane? La risposta è fornita dallo stesso Mach: egli infatti afferma che questa esperienza non è data e "*il nostro compito è mettere d'accordo [questo fatto] con gli altri fatti che già conosciamo, non con le nostre arbitrarie fantasticherie*".

L'analisi delle due argomentazioni mostra un fatto importante: in entrambe il centro della riflessione machiana non è la ricerca dell'origine delle proprietà inerziali, ma è l'eliminazione di ogni riferimento al concetto di moto assoluto e la descrizione funzionale dei fenomeni osservati. I passi più equivoci, quelli che sembrano indicare un legame causale fra l'inerzia e la presenza delle altre masse stellari, svolgono un ruolo secondario e sono il frutto di una tecnica retorica adottata da Mach per sostenere le sue tesi principali. Solo la seconda argomentazione sembra indicare, in modo confuso, un tale legame, ma l'intuizione non viene generalizzata in quanto sarebbe un'ipotesi non direttamente verificabile.

A nostro avviso dunque Mach non propose alcun legame effettivo fra l'inerzia e le altre masse stellari; se però abbandoniamo il particolare contesto filosofico in cui le argomentazioni sono proposte, un tale legame è facilmente deducibile ed è quello che fecero Einstein e alcuni fisici tedeschi.

2. Le prime considerazioni di Einstein sul Principio di Mach (1907-12).

Nel paragrafo precedente abbiamo specificato per quali ragioni Mach non individuò lo stretto rapporto fra inerzia e gravità, ma Einstein e alcuni fisici Tedeschi (quali Friedläender e Föppl) riconobbero la bontà del ragionamento machiano e lo affrancarono dal particolare contesto in cui era stato proposto: per essi l'inerzia di un corpo era legata alla presenza delle altre masse stellari. Mentre i Friedläender e Föppl cercarono una via sperimentale al fine di verificare la generalizzazione delle conclusioni di Mach, giungendo a risultati non del tutto soddisfacenti, Einstein sviluppò questa congettura da un punto di vista teorico fino a formalizzarla in un Principio della Relatività Generale. In questo paragrafo cercheremo di mostrare quali siano stati i primi passi per giungere all'obiettivo finale, ottenuto solo nel 1918.

Per comprendere con maggior precisione le possibili riflessioni einsteniane sull'argomento, cerchiamo di descrivere il particolare utilizzo che lo scienziato tedesco fece degli esperimenti mentali (quali le variazioni dello stesso Mach) e dei 'fatti osservati'. A tal fine riprendiamo in esame la nota esperienza del conduttore e del magnete che svolse un ruolo decisivo nella stesura della Relatività Ristretta (un'esperienza che pochissimi fisici prima del 1905 ritenevano problematica)[13]. Sappiamo infatti che quando una corrente è indotta in un conduttore mentre un magnete si muove rispetto ad esso, risulta che la corrente osservata è la stessa sia che venga tenuto fermo il conduttore, sia che venga mosso il conduttore e tenuto fermo il magnete. Quel che conta è solo la velocità *relativa*, ma le equazioni che descrivono il fenomeno (prima del 1905) appaiono differenti nei due casi. Einstein di fronte a questa asimmetria,

che ai suoi occhi era inspiegabile, pensò che l'unica via di uscita fosse quella di individuare un principio del tutto generale che consentisse di trattare i due casi come teoricamente equivalenti, dato che conducono in pratica al medesimo effetto. L'esperienza del conduttore e del magnete diviene, in sintesi, fonte di ispirazione per un Principio teorico del tutto generale: sappiamo che la soluzione dell'asimmetria si risolse con la teoria della Relatività Ristretta e con l'assunzione del Principio di Relatività. ⁽⁴⁾

Ci troviamo in una situazione analoga se consideriamo le argomentazioni machiane sul secchio rotante; non abbiamo ora un'esperienza che ci suggerisca la soluzione di una problematica asimmetria, ma siamo in possesso di una argomentazione convincente – espressa con esperimenti mentali – che ci induce a pensare l'inerzia come un caso limite della gravità. Einstein riconobbe in questa 'congettura' un aspetto determinante di una nuova teoria che descriva i fenomeni gravitazionali, tanto che cercò di riprodurla sia nella preliminare teoria scalare della gravitazione sia nella finale Teoria della Relatività Generale. Esiste però una netta differenza fra il caso del 1905 ed il tentativo successivo: mentre a fine 800 Einstein aveva a disposizione tutte le tessere del mosaico (compreso il Principio di Relatività) e quindi suo compito fu quello di unificarle e modificarle per costruire al fine una visione completa, dopo il 1905 – con la costruzione della Relatività Generale – egli si trova nella sgradevole situazione di sapere quale caratteristica avrebbe dovuto avere la nuova teoria (il legame fra inerzia e gravità), ma non un principio già sviluppato da poter applicare od ampliare.

Cerchiamo ora di descrivere il *primo* tentativo einsteniano di formalizzare questa caratteristica nella preliminare teoria statica della gravitazione, sviluppata fra il 1907 e il 1912. A conclusione di questo periodo vi è la famosa nota del 1912, indicata già nell'Introduzione, in cui Einstein cita Mach come sua fonte di ispirazione.

Iniziamo con il considerare la Teoria della Relatività Ristretta. Essa è basata sulla fondamentale idea che certi sistemi di coordinate (i sistemi inerziali) sono equivalenti per la formulazione delle leggi fisiche; in essi è valido il Principio di Inerzia e la legge secondo cui la luce si propaga con velocità finita. Ma questi sistemi sono privilegiati per qualche motivo insito nella natura o per la struttura teorica da noi sviluppata?

A ben vedere il concetto di accelerazione è l'elemento teorico discriminante che favorisce i sistemi inerziali, in quanto permette di distinguere fra moti *relativi* e moti *veri* come ci suggerisce l'esperimento newtoniano del secchio rotante. Sappiamo però, grazie alla critica machiana, che tutti i moti naturali sono moti 'relativi', come pure relativi devono essere i concetti utilizzati nella loro descrizione (compreso quello di accelerazione). L'accelerazione dunque perde quella centralità, posseduta sia nella Meccanica che nella Relatività Ristretta, e favorisce l'estensione dell'insieme di sistemi rispetto a cui compiere la descrizione fisica.

Ma come attuare questa estensione? Einstein inizia a riflettere sull'argomento a partire dal 1907, quando in un articolo di rassegna [14] sulla Teoria appena sviluppata tenta di applicare i risultati del 1905 a domini via via maggiori fino ad includere gli effetti gravitazionali. Nel quinto paragrafo del saggio egli estende la teoria ed introduce il *Principio di Equivalenza* che sarà il punto di partenza ed il cardine delle sue ricerche successive. Nel manoscritto *Morgan* Einstein mostra come giunse alla scoperta del Principio; ancora una volta notiamo che fu un esperimento mentale accoppiato con un 'fatto', allora non completamente spiegato, ad indurlo ad una congettura del tutto generale. Il fenomeno empirico di cui stiamo parlando consiste

⁽⁴⁾Perché poi cercare un principio generale e non limitarsi all'atteggiamento dei fisici di fine 800 che costruivano le teorie per induzione, quindi per approssimazioni successive, a partire dai dati dell'esperienza (si pensi ad esempio all'ipotesi 'ad hoc' della contrazione delle lunghezze nella teoria di Lorentz) è presto detto: come Einstein ci mostra nelle sue *Note Autobiografiche* egli era oramai giunto alla conclusione che per risolvere le problematiche relative al comportamento e alla struttura dell'etere l'unica via possibile era "la scoperta di un principio formale universale".

nell'osservazione che i corpi, di qualunque natura essi siano, cadono in un campo gravitazionale esterno con la medesima accelerazione. Per quanto riguarda invece l'esperimento mentale egli considera un osservatore in caduta libera in un campo gravitazionale. Einstein nota come l'osservatore abbia la libertà di considerarsi in quiete in quanto se lascia cadere un oggetto nelle sue vicinanze questo rimane fermo o si muove rispetto al suo corpo di moto rettilineo uniforme.

Deduciamo dunque che non vi è distinzione fra un sistema a riposo ed un sistema in caduta libera in un campo gravitazionale esterno; non siamo in grado di individuare l'accelerazione 'assoluta' con cui si muove il sistema dell'osservatore. Questa considerazione si può esprimere con facilità anche con il seguente esempio.

In una regione spaziale completamente libera da campi di forze costruiamo, seguendo la Meccanica Classica, un sistema di riferimento inerziale, e consideriamo un corpo di massa M libero di muoversi in esso (il suo moto è rettilineo e uniforme). Prendiamo poi in esame nella medesima regione spaziale un sistema accelerato K' e osserviamo il moto di M rispetto a K' : esso sarà accelerato e non più rettilineo uniforme. Poniamoci ora la domanda se il sistema K' sia dotato di una 'accelerazione assoluta', come ci suggerisce la Meccanica Classica, oppure se possiamo compiere la descrizione del medesimo fenomeno in modo differente. Una via possibile è quella di considerare il sistema K' "a riposo" – quindi inerziale – ed immergerlo in un campo gravitazionale esterno (generato ad esempio da masse molto lontane). Le due *descrizioni sono equivalenti*: nel primo caso i corpi, indipendentemente dalla loro natura fisica e chimica, si muovono con una accelerazione determinata dal moto di K' , nel secondo caso invece cadono con la medesima accelerazione generata ora dal campo gravitazionale esterno. Non vi è alcuno strumento per stabilire se il sistema K' è accelerato o a riposo in un campo gravitazionale.

Concludiamo dunque che il Principio di Equivalenza estende l'insieme dei sistemi utili per la descrizione dei fenomeni naturali 'almeno' a quelli uniformemente accelerati.

Ai fini della nostra discussione, più che valutare l'estensione del Principio di Relatività, conviene notare come il comportamento inerziale di un corpo in un sistema di riferimento accelerato sia descritto in modo del tutto equivalente se utilizziamo un sistema inerziale immerso in un campo gravitazionale esterno: otteniamo dunque una *prima* proprietà che si riallaccia alla congettura machiana di un legame fra inerzia e presenza delle altre masse stellari (il campo gravitazionale da esse creato).

Il Principio di Equivalenza insieme con la struttura della Relatività Ristretta portarono Einstein ad ottenere alcuni risultati notevolissimi, già a partire dall'articolo del 1907, ma essi furono presentati in una forma più compatta nel saggio del 1911[15]. In esso è presente la prima possibile verifica sperimentale della futura Teoria della Relatività Generale (la deflessione dei raggi luminosi), ma a noi interessa soprattutto sottolineare le conclusioni riguardo alla *gravità dell'Energia*, all'*equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale* ed infine alla *variazione della velocità della luce in un campo gravitazionale*.

Nell'articolo del 1911 Einstein utilizza un modello composto da tre sistemi di riferimento: un primo sistema K immerso in un campo gravitazionale, con accelerazione γ , diretto lungo l'asse positivo delle z , un secondo sistema K' in moto accelerato lungo le z positive con la medesima accelerazione γ , ed infine un sistema K_0 in quiete. Le leggi della Relatività Ristretta valgono per K_0 e possono venire applicate al moto accelerato del sistema K' se si considerano istanti di tempo molto piccoli ed accelerazioni non eccessivamente grandi. Grazie al Principio di Equivalenza i risultati ottenuti sono trasferiti anche al sistema K immerso in un campo gravitazionale; con questo metodo ingegnoso si ottengono informazioni sugli effetti gravitazionali studiando il comportamento dei sistemi uniformemente accelerati.

In seguito Einstein considera due sistemi materiali S_1 ed S_2 posizionati lungo l'asse z del

sistema K' ad una distanza h , in modo tale che fra di essi vi sia una differenza di potenziale pari a γh , ed immagina che il sistema S_2 emetta verso S_1 una quantità di energia E_2 sotto forma di radiazione, con frequenza ν_2 , che viene misurata in S_1 con uno strumento identico a quello utilizzato da S_2 , ottenendo un risultato pari a E_1 con frequenza ν_1 . Grazie alle leggi della Relatività Ristretta il legame fra ν_1 e ν_2 è:

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2} \right) \quad (1)$$

Risultato che vale anche per il sistema K se sostituiamo a γh la differenza di potenziale gravitazionale Φ fra i due punti:

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (2)$$

Sia la (1) che la (2) sembrano indicare un qualcosa di assurdo: se il processo di emissione della luce è continuo, non si capisce per quale motivo le due frequenze debbano essere differenti all'atto dell'emissione e della ricezione. Per ovviare a questa 'asimmetria' Einstein ritiene di dover modificare la nozione di tempo e stabilisce che i due orologi con cui si misura la frequenza in S_2 ed S_1 battono con un *ritmo differente* – in modo da compensare la diversità fra ν_1 e ν_2 . Da questa assunzione segue una conseguenza di capitale importanza per la costruzione della Teoria: la velocità della luce *non è più costante* come nell'usuale teoria ristretta, ma dipende dal potenziale gravitazionale in cui è misurata (quindi diviene un ottimo candidato per descrivere il campo gravitazionale).

Se indichiamo con c_0 la velocità della luce misurata da un orologio U_0 nell'origine del sistema K immerso in un campo gravitazionale, e con c la stessa velocità della luce misurata con un orologio U_1 in un punto a potenziale Φ rispetto all'origine, il rapporto fra le due velocità, tenendo conto del differente battito di U_0 ed U_1 è:

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (3)$$

La (3) mostra dunque che la velocità della luce non rimane costante se si considerano regioni spazio-temporali a potenziale variabile: da ciò deduciamo che le *trasformazioni di Lorentz perdono la loro universale applicabilità* e devono essere sostituite da leggi più generali. Nel 1912 Einstein costruisce in modo approssimato le trasformazioni corrette, utilizzando il modello dei Sistemi di Riferimento e imponendo l'invarianza di un guscio sferico in espansione alla velocità della luce[16]. Ai nostri fini interessa specificare solo come varia la velocità della luce nel passaggio da un sistema all'altro: indicando con $K(x, y, z, t)$ un sistema accelerato che si muove lungo l'asse delle x e con $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ un sistema a riposo che è orientato nello stesso modo di K , la legge di trasformazione per c è:

$$c = c_0 + ax \quad (4)$$

dove c è la velocità della luce misurata in K , c_0 la medesima velocità misurata in Σ ed infine a rappresenta l'accelerazione dell'origine di K in riferimento a Σ . Ricordiamo ora che c dipende dalle coordinate spaziali (nel nostro caso la semplice x) e non dal tempo, quindi studiare la variazione di c equivale a studiare il comportamento del campo gravitazionale statico. Per avere una teoria covariante è fondamentale ricavare un'equazione che descriva il campo c e che non vari la sua forma nel passaggio da un sistema all'altro. L'equazione più semplice compatibile con la (4) è:

$$\Delta c = 0 \quad (5)$$

Una volta introdotte le equazioni del campo c , Einstein ritorna a studiare il comportamento di un punto materiale libero di muoversi in esso. Egli ottiene la fondamentale equazione :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \right] = 0 \quad (6)$$

dove $q = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ rappresenta la velocità della particella. La (6) si può anche scrivere come

$$E = \frac{mc}{\sqrt{(1 - q^2/c^2)}} \quad (7)$$

che rappresenta il Principio dell'Energia per il sistema in studio. Se approssimiamo la (7) per un moto sufficientemente lento, si ricava un'importante relazione ai fini della nostra discussione:

$$E = mc + \frac{m}{2c} q^2 \quad (8)$$

L'ultimo termine a secondo membro della (8) rappresenta in prima approssimazione l'*Energia Cinetica* della particella: osserviamo che essa dipende *esplicitamente* dal campo c (quindi dal potenziale gravitazionale) ed è dunque un chiaro *termine di interazione*. Nell'ordinaria Meccanica Classica l'Energia Potenziale Gravitazionale e quella Cinetica presentano un comportamento differente, che Einstein sottolineò più volte come motivo di insoddisfazione, in quanto la prima è un'espressione totalmente relativa (vi è la distanza fra le masse in interazione), la seconda invece dipende solo dalla velocità della particella e gli altri corpi rispetto a cui il moto è valutato non sono presi in considerazione. L'aspetto nuovo della (8) consiste nella presenza di un termine di interazione con la massa che genera il campo; in questo modo si ottiene un'energia cinetica *relativa* alle masse presenti nel sistema, in tipico spirito machiano. Tale considerazione mostra un'ulteriore punto di contatto fra le riflessioni di Einstein e le corrispondenti congetture del filosofo austriaco (tutti i concetti con cui si compie la descrizione fisica devono essere relativi).

Essa rappresenta anche il punto determinante per comprendere appieno la nota del 1912[9]. In essa Einstein tenta di dimostrare l'esistenza di un effetto analogo all'induzione elettrodinamica nel caso di un campo gravitazionale statico; egli infatti si domanda se un corpo massivo dotato di moto accelerato possa indurre una forza inerziale su una massa relativamente più piccola posta nelle sue vicinanze. Einstein costruisce un modello formato da un guscio sferico di materia K e da un punto massivo P libero di muoversi al suo interno ed in seguito ricerca la forza indotta su P da un moto accelerato di K . E' facile qui notare come vengano riproposte le argomentazioni machiane sull'esperimento del secchio; si ricordi ad esempio la frase in cui Mach asserisce: "*Nessuno può dire quale sarebbe l'esito dell'esperimento... se le pareti del vaso divenissero sempre più massicce, fino ad uno spessore di qualche miglio*"⁽⁵⁾. Per giungere a determinare la forza indotta, Einstein inizialmente dimostra che i due corpi costituenti il sistema sono in interazione. Utilizza la teoria scalare del campo gravitazionale sviluppata in quel periodo in quanto il guscio di materia K genera un campo gravitazionale statico. Egli inoltre conosce sia la grandezza del potenziale gravitazionale all'interno di K (che è pari a kM/r dove k è la costante di gravitazione universale, r la distanza dal centro del guscio), sia la forma delle equazioni a cui deve soddisfare il punto massivo (le (6)). Ma quello che maggiormente interessa ad Einstein è l'utilizzo dell'Energia Cinetica ottenuta dalla (8)

$$L = \frac{m}{2} q^2 \frac{c_0}{c} \quad (9)$$

⁽⁵⁾Le pareti del vaso corrispondono al guscio sferico K , mentre le particelle d'acqua sono descritte dal punto massivo P . La rotazione del secchio ipotizzata da Mach è ora rappresentata dal moto accelerato di K

(q è la velocità della particella, c_0 la velocità della luce all'infinito). La (9) rappresenta un ottimo candidato per dimostrare che il punto P è in interazione con la massa M. Nella (9) l'unica incognita ancora da determinare è la velocità della luce che dipende dalle coordinate spaziali. Einstein riesce a determinare il suo valore all'interno della sfera supponendo che il moto di P sia relativamente lento e ottiene l'Energia Cinetica:

$$L = \frac{m}{2} q^2 \left(1 + \frac{kM}{Rc_0^2} \right) \quad (10)$$

dove si osserva che la *massa inerziale* della particella è

$$m' = m + \left(\frac{kM}{Rc_0^2} \right) \quad (11)$$

Da questa espressione si desume un fatto notevolissimo: “*la presenza del guscio K aumenta la massa inerziale di un punto P al suo interno. Ciò suggerisce che l'intera inerzia di un punto materiale è un effetto della presenza di tutte le altre masse, risultante da un certo tipo di interazione con esse*” (in nota Einstein cita Mach come sua fonte di ispirazione). E' importante sottolineare che, ancora una volta, un esperimento mentale porta Einstein a compiere una generalizzazione e ad esprimere con maggiore convinzione che l'inerzia e la gravità sono in qualche modo legate.

Con la (10) e la (11) Einstein dimostra che le due parti del sistema sono in interazione reciproca e ammette nell'ultimo punto dell'articolo che esse si scambiano accelerazioni reciproche, proprio come ci suggerisce il *Principio Universale* proposto da Mach ⁽⁶⁾. In questo modo il moto accelerato di K induce una forza sul punto P al suo interno pari a

$$\frac{3}{2} \frac{kMm}{Rc^2} \Gamma \quad (12)$$

dove Γ è l'accelerazione di K. La (12) rappresenta il punto conclusivo del saggio di Einstein.

Veniamo ora a riassumere le nostre conclusioni. Tra il 1907 e il 1912 (prima della svolta geometrica del 1913) Einstein è interessato ad estendere il Principio di Relatività a sistemi non in moto uniforme, in modo da sviluppare una teoria più generale che includa quella del 1905 ed incorpori i fenomeni gravitazionali. Sa che la nuova teoria deve giustificare un principio desunto per generalizzazione dalla lettura delle pagine machiane e che stabilisce uno stretto legame fra l'inerzia e la gravità. Egli non dispone di un Principio compiutamente formalizzato – infatti impiegherà diversi anni per giungere ad una formulazione completa di questa idea (1918) – ma nel periodo 1907-12 esplora ed ottiene diversi risultati che lo inducono a proseguire la sua ricerca. Fra questi il più importante è il Principio di Equivalenza che indica chiari legami fra inerzia e gravità e che lo portano a considerare un semplice modello per chiarire e rendere esplicita la congettura di un legame causale fra inerzia e la presenza degli altri corpi dell'Universo.

3. Conclusioni.

Nella sua opera principale, *La Meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Mach sviluppa una approfondita critica ai fondamenti della Meccanica Classica ed in alcuni passi sembra proporre l'ipotesi di un legame causale fra l'inerzia di un corpo e la presenza delle altre masse stellari. Un'attenta analisi dei passi più equivoci dimostra che Mach non giunge ad una congettura così generale e che le sue argomentazioni sono indissolubilmente legate al particolare

⁽⁶⁾Confronta al riguardo l'articolo [7] e [8]

esperimento considerato (quello del secchio di Newton) e al ruolo che l'esperienza presenta nella sua posizione filosofica. In ogni caso questa conclusione è facilmente deducibile dai ragionamenti machiani, ed è questo il risultato che Einstein raggiunge negli anni della sua formazione scientifica. Egli infatti riconosce nella congettura machiana una valenza del tutto generale e ricerca un Principio teorico che la formalizzi. Il primo tentativo che egli compie è nel passaggio dalla Relatività Ristretta alla Generale con la preliminare teoria del campo gravitazionale statico; in essa Einstein sviluppa un modello fisico che ricorda le argomentazioni machiane sul secchio di Newton ed in cui sono presenti alcuni risultati che lo inducono a proseguire la ricerca. Il Principio nella sua forma completa sarà introdotto solo nel 1918 e prenderà il nome di *Principio di Mach*.

REFERENCES

- [1] EINSTEIN A., *Annalen der Physik*, 55 (1918) 241-244.
- [2] MACH E., *Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch dargestellt* (Leipzig) 1883 .
- [3] FRIEDLÄENDER B., FRIEDLÄENDER I., *Absolute oder Relative Bewegung?* (Berlino) 1896 .
- [4] FÖPPL A., *Akademie der Wissenschaften, München, Mathematisch-Wissenschaftliche Klasse, Sitzungs*, 6 (1904) 5-28.
- [5] FÖPPL A., *Akademie der Wissenschaften, München, Mathematisch-Wissenschaftliche Klasse, Sitzungs*, 5 (1904) 5-28.
- [6] HOFMANN, *Kritische Beleuchtung der beiden Grundbegriffe der Mechanik: Bewegung und Trägheit und daraus gezogene Folgerungen betreffs der Achsendrehung der Erde und des Foucault'schen Pendelversuchs*. Wien und Leipzig - (-) 1904 -.
- [7] GASCO E., *Il contributo di Mach sull'origine dell'inerzia*, Quaderni di Storia della Fisica (2004) 12.
- [8] GASCO E., *Mach's contribution to the origin of Inertia*, <http://philsci-archive.pitt.edu> (2003) 00001259.
- [9] EINSTEIN A., *Vierteljahrsschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen*, 44 (1912) 37-40.
- [10] MACH E., *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der arbeit* (Praga) 1872 .
- [11] HELMHOLTZ H., *Über die Erhaltung der Kraft* (Berlino) 1847 .
- [12] NORTON J., *Mach's Principle before Einstein*, *Einstein Studies*, VI (1995) 9.
- [13] EINSTEIN A., *Ann. Physik*, 17 (1905) 893.
- [14] EINSTEIN A., *Jarbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4 (1907) 411.
- [15] EINSTEIN A., *Annalen der Physik*, 35 (1911) 898.
- [16] EINSTEIN A., *Annalen der Physik*, 38 (1912) 355.